

MATEMATICA

UN GIOCO DIVERTENTE E ISTRUTTIVO

Le tre torri di Hanoi da Fibonacci a Lucas

SI DEVE RICOSTRUIRE UNA COLONNA PARTENDO DA UN'ALTRA, SPOSTANDO DEI DISCHETTI UNO PER VOLTA E ORDINANDOLI PER GRANDEZZA, DAL MAGGIORE IN BASSO AL PIU' PICCOLO IN ALTO. MA CHE SUCCEDA SE LE COLONNE SONO 4?

Federico Peiretti

NARRA la leggenda che all'inizio dei tempi, Brahma portò nel grande tempio di Benares, sotto la cupola d'oro che si trova nel centro del mondo, tre colonnine di diamante e sessantaquattro dischi d'oro, collocati su una di queste tre colonnine e ordinati dal più grande in basso al più piccolo in alto, in cima alla colonnina. E' la sacra Torre di Brahma che vede impegnati, giorno e notte, i sacerdoti del tempio nel trasferimento della torre di dischi dalla prima alla terza colonnina. Essi non devono contravvenire alle regole precise, imposte da Brahma stesso, che richiedono di spostare soltanto un disco alla volta e che non ci sia mai un disco sopra uno più piccolo.

Quando i sacerdoti avranno completato il loro lavoro e tutti i dischi saranno riordinati sulla terza colonnina, la torre e il tempio crolleranno e sarà la fine del mondo.

Questa suggestiva leggenda indiana in realtà è un'invenzione di Edouard Lucas, studioso di teoria dei numeri, che deve la propria fama all'analisi della «successione di Fibonacci» e alla sua divulgazione (vedi «TuttoScienze» del 29 febbraio 1984).

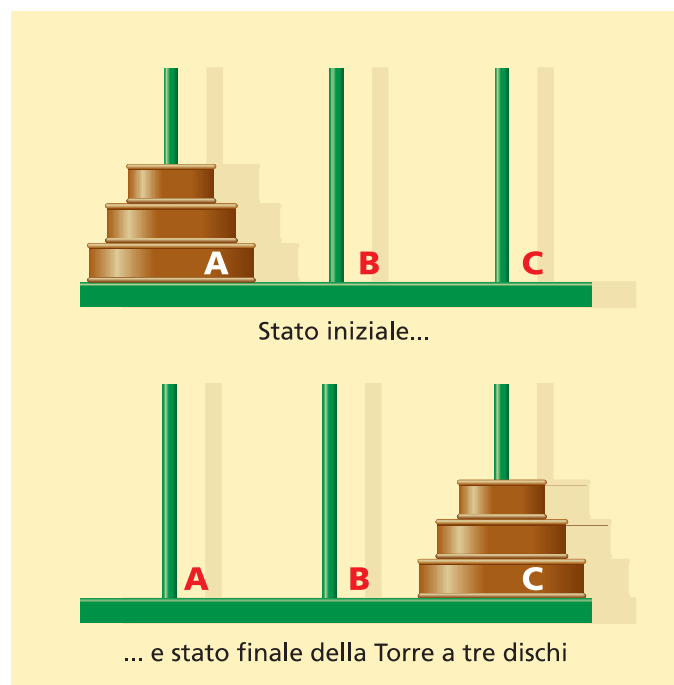
Professore di matematica in un liceo parigino, Lucas è il più celebre esperto in giochi matematici dell'Ottocento, inventore di tanti rompicapo e giochi ancora oggi popolari. Morì nel 1891, a quarantanove anni, per un banalissimo incidente. La scheggia di un piatto, rotto accidentalmente durante un banchetto, lo ferì al volto: se ne andò in pochi giorni per erisipela. La leggenda della Torre di Brahma, che molti ritengono autentica, gli

servì nel 1883, per lanciare nel modo più originale, la sua Torre di Hanoi, che si può trovare facilmente in tutti i negozi di giochi.

In genere, il gioco in vendita è composto da tre colonnine e otto dischi, di dimensioni decrescenti e infilati in una delle colonnine. Si tratta di spostare la torre dei dischi dalla colonnina su cui si trova, a una delle altre due colonnine libere. Non è permesso prendere tutta la torre dei dischi e spostarla sulla terza colonnina, si può spostare, lo ripetiamo, soltanto un disco alla volta; inoltre un disco non può mai avere sopra di sé un disco più grande. Proprio queste regole impongono un numero ridotto di dischi, altrimenti il gioco diventa lungo e complicato. Per

una torre di 64 dischi, la Torre di Brahma, i movimenti necessari per lo spostamento sono più di 18 miliardi di miliardi.

Se calcoliamo un movimento al secondo e se teniamo presente che in un secolo ci sono $100 \times 365,24 \times 24 \times 60 \times 60$ secondi, cioè circa $3,2 \times 10^9$ secondi, per portare a termine l'operazione i sacerdoti del tempio di Benares impiegherebbero più di cinque miliardi di secoli e quindi, sul nostro futuro, da questo punto di vista, possiamo stare tranquilli. L'analisi del gioco mette in evidenza un importante procedimento matematico di risoluzione dei problemi, l'iterazione, utilizzata ad esempio, per trovare le soluzioni approssimate di un'equazione. Il gioco è anche largamente diffuso fra



gli studenti dei corsi di informatica, come esercizio di programmazione. Indichiamo con A, B e C le tre colonnine. Nel caso banale di un unico disco, occorrerà un solo movimento per risolvere il gioco, basta infatti spostare il disco dalla colonnina A alla colonnina C. Con due dischi sono necessari 3 movimenti, si deve spostare il disco superiore sulla colonni-



Il matematico Edouard Lucas

risolvere con tre dischi, lo sapremo infatti risolvere anche con quattro dischi. Sarà sufficiente trasportare dapprima i tre dischi superiori sulla seconda colonnina, con il procedimento già noto, successivamente il quarto disco sulla terza e infine si collocheranno su questo gli altri tre dischi, sempre con lo stesso procedimento. Risolto il caso dei quattro dischi, non ci saranno difficoltà a procedere, allo stesso modo, con cinque dischi e così via, sempre rispettando le regole del gioco. A questo punto il lettore frastornato rischia di non capire più nulla. Al solito, è bene saperlo, per capire la matematica, anche soltanto di gioco, non si può soltanto "leggere", ma è necessario "fare" matematica, con esercizi e riflessioni personali. In questo caso, giocando con dischi e colonnine reali (o virtuali, al computer), tutto sarà sicuramente più chiaro. Si tratta, come dicevamo, di una soluzione iterativa che ci consente di scoprire la formula generale, per n dischi: $2^n - 1$, movimenti. Per arrivare a questa formula si usa il metodo dell'induzione matematica, ma per un eventuale approfondimento dell'argomento, rimandiamo il lettore interessato alle segnalazioni indicate a parte.

Per la torre di sessantaquattro dischi, nota come Torre di Brahma, secondo la formula che abbiamo dato, avremmo quindi - esattamente - due elevato alla 64, meno 1, cioè $18.446.744.073.709.551.615$ movimenti.

Che cosa succede se introduciamo nel gioco una quarta colonnina? Quanti sono, in questo caso, i movimenti necessari per spostare un dato numero di dischi? E con più colonnine?

Se siete in difficoltà, ecco la soluzione

E UNA SERIE DI SITI INTERNET PER SCOPRIRE TUTTI I SEGRETI DI QUESTO AFFASCINANTE ROMPICAPO

ECCO le risposte ai problemi che abbiamo posto ai nostri amici lettori, studenti e non.

Se indichiamo le tre colonnine con A, B e C, possiamo schematizzare nel modo seguente i sette movimenti necessari con tre dischi:

A	3	2	1	1	0	1	1	0
B	0	1	1	0	1	1	2	3
C	0	0	1	2	2	1	0	0

Per un numero superiore di dischi è sufficiente usare la stessa tecnica iterativa che abbiamo presentato. E avremo: 15 movimenti con 4 dischi, 21 con 5, 63 con 6, 127 con 7 e 255 con 8 dischi.

Il consiglio che possiamo da-

re è quindi di iniziare il gioco con pochi dischi, per salire a 8 soltanto dopo aver fatto un po' di esperienza.

Se introduciamo una quarta colonnina abbiamo ancora, come minimo, 3 movimenti con 2 dischi, ma soltanto 5 con 3, 9 con 4, 13 con 5, 17 con 6, 25 con 7 e 33 con 8 dischi.

Si tenga presente che la quarta colonnina consente di costruire più torri. Ad esempio, con quattro colonnine possiamo fare due torri, una di due dischi e l'altra di uno. Poiché sono necessari tre movimenti per costruire la torre di due dischi con quattro colonnine e un movimento per la torre di un disco, il totale dei movimenti sarà:

$$3 + 1 + 1 + 1 + 3 = 9.$$

E ora qualche suggerimento per chi desidera sapere qualcosa di più sulle: libri e Rete offrono molte possibilità.

Il problema originale, nella versione del suo inventore:

M. Edouard Lucas, *Récréations mathématiques*, III, Albert Blanchard, 1979.

Applet Java con la possibilità di variare il numero dei dischi e di controllare automaticamente la soluzione:

<http://web.infinito.it/utenti/microloft/Giochi/Hanoi/Hanoi.html>

Il programma in C della Torre di Hanoi, con un'ampia scelta di altri problemi risolti per iterazione:

<http://www.ing.unife.it/eletr/FondamentiInformati>

ca2/denti/lucidi/lez3bis.htm
Un'accurata presentazione del gioco:

<http://cut-the-knot.com/recurrence/hanoi.html>

Una raccolta delle più interessanti pagine web dedicate alla Torre di Hanoi:

<http://www.mts.net/~kolar/javascript/Hanoi/HTonWebE.html>

Torre di Hanoi con dischi variabili da 3 a 200 e colonnine da 3 a 50:

<http://pages.prodigy.net/mathman2001/>

L'induzione matematica, per la dimostrazione della formula del gioco:

<http://www.math.usouthal.edu/~brick/teaching/math1110/hanoi-proof.html>

INFORMATICA

Gli apostoli del software libero

BILL Gates ha appena lanciato il suo nuovo sistema operativo: fino a quando durerà il monopolio Microsoft? La risposta dipende dagli utenti. La fortuna di Bill potrebbe anche essere al tramonto se il movimento per il software libero, che fa riferimento al sistema operativo Linux, dovesse allargarsi a macchia d'olio. Il software proprietario come Windows, infatti, non è modificabile, e quindi non può crescere se non come e quando il padrone vuole; il software libero come Linux, invece, può essere arricchito da chiunque. Non è utopia: Internet si deve proprio al software senza copyright: il web, per esempio, è un «regalo» del Cern di Ginevra. Mariella Berra, sociologa dell'Università di Torino, e Angelo Raffaele Meo, ordinario al Politecnico torinese, in «*Informatica solidale*» (Bollati Boringhieri, 238 pagine, 28 mila lire) ci presentano la storia del movimento per il software libero e propongono nell'ultimo capitolo una «visione del mondo» in cui tutti i prodotti culturali sono visti come patrimonio comune e disponibile.

LA STAMPA

Quotidiano fondato nel 1867

Direttore responsabile
Marcello Sorgi
Condirettore
Gianni Riotta
Vicedirettrici
Valter Sabadin, Carlo Bastasin

Art director
Cynthia Sgarallino

TUTTOSCIENZE
SUPPLEMENTO A CURA DI
Piero Bianucci
Renato Scaglia
Ideazione grafica
Roberto Travan

EDITRICE LA STAMPA SPA
Via Marengo 32, Torino

AMMINISTRATORE DELEGATO
E DIRETTORE GENERALE
Alberto Nicoletto

Fotocomposizione e impaginazione
Tipografia Editrice La Stampa

“Papà, ma è proprio necessario imbottirsi così?”
“Certo, e c'è chi imbottisce anche la casa: con gli isolanti BASF.”

Gli isolanti termici BASF: Styropor®, Neopor® e Styrodur® proteggono le case sia dal freddo che dal caldo. E in più fanno risparmiare energia e migliorano l'ambiente. È dimostrato: le nuove lastre isolanti Styropor®, Neopor® e Styrodur® installate in un anno fanno risparmiare ben 2 milioni di tonnellate di combustibile a livello mondiale. Ma non solo: riducono di 5 milioni di tonnellate le emissioni di anidride carbonica. Se tutte le case fossero isolate con Styropor®, Neopor® e Styrodur® si potrebbero ridurre del 70% le emissioni di anidride carbonica da riscaldamento. Vivere in casa sarebbe più confortevole, vivere all'aperto sarebbe più sano: il mondo sarebbe un po' migliore.

C'è molto altro da sapere:
fax 0362.512.657
www.basf.de

Pensiero innovativo. Azione responsabile.

Prodotti Chimici, Materie Plastiche e Fibre,
Prodotti di Nobilitazione,
Fitosanitari e Nutrizione, Petrolio e Gas

BASF