Tesi di laurea
in
Economia e Commercio

Facoltà di Economia di Torino

Analisi di dati e trading operativo con R

Relatore: Pietro Terna
Correlatore: Rosalba Ignaccolo

Simone Costa
matr. 157126

Indice:

Introduzione

- **I** Premessa
- **II** Che cos'è R
- **III** Cenni introduttivi su R

Capitolo 1: Mercati e fondamentali finanziari

- **1.1** Una prospettiva manageriale 1
- **1.2** Evidenze sull'ipotesi di mercato efficiente 2
- **1.3** Una guida pratica agli investimenti 4
- **1.4** Il costo del capitale aziendale ed il CAPM con R 10
- **1.5** Appendice statistica A 30

Capitolo 2: Operazioni sui mercati finanziari

- **2.1** Overview sui mercati finanziari 34
  - **-1.3.1** I mercati monetari
  - **-1.3.2** I mercati obbligazionari
  - **-1.3.3** I mercati azionari
  - **-1.3.4** Il mercato dei cambi
- **2.2** Gli strumenti 36
- **2.3** Le regole 42
- **2.4** Il Book 43
- **2.5** Una analisi time series di rendimenti con R 46
- **2.6** Appendice statistica B 73

Capitolo 3: Analisi dei mercati finanziari

- **3.1** Analisi macroeconomica 76
- **3.2** Analisi fondamentale del mercato azionario 79
- **3.3** Elementi di analisi tecnica 81
- **3.4** Uno sguardo alle previsioni con R 84
- **3.5** Una analisi sull'integrazione dei mercati finanziari con R 111
- **3.6** Appendice statistica C 123

Capitolo 4: Politica monetaria e mercati finanziari

- **4.1** Sul tasso ottimale di inflazione 130
- **4.2** Sulla relazione tra crescita della moneta ed inflazione 131
  - **-4.2.1** Moneta e liquidità

-4.2.2 Tassi di interesse reali e nominali
-4.2.3 Crescita della moneta e tasso di interesse reale
-4.2.4 Crescita della moneta e tasso di interesse nominale
-4.2.5 Crescita della moneta e saldi monetari reali
- **4.3** Gli strumenti della politica monetaria 133
- **4.4** L'approccio di portafoglio al meccanismo di trasmissione 135
- **4.5** Domanda di moneta ed inflazione con R 142
- **4.6** Appendice statistica D 163

Capitolo 5:
Calcolo del coefficiente di avversione al rischio nell'allocazione ottima di portafoglio
- **5.1** Introduzione 166
- **5.2** Sviluppo della funzione di utilità 173
- **5.3** L'effetto ricchezza 179
- **5.4** Appendice E 191

Appendice generale 194

Bibliografia 208

Introduzione

I Premessa

Il lavoro si propone come una presentazione delle più importanti modalità di analisi per il trading operativo in R. Si articola in cinque capitoli ed una appendice tecnica. Nel primo capitolo si introducono i fondamentali finanziari ed un esercizio tratto da Benninga (2001) e da Verbeek (2006) sulle tecniche principali di regressione lineare in R applicate alla teoria di portafoglio; nel secondo segue un overview sulla struttura ed i prodotti dei mercati finanziari ed una proposta di analisi time series (campo univariato) in R su indici di borsa; nel terzo capitolo si introducono alcuni elementi fondamentali d'analisi e previsione nei mercati con una panoramica su alcuni strumenti (campo multivariato) ed una sintesi tra analisi teorica e pratica con l'introduzione del test di Johansen e l'identificazione di una relazione di cointegrazione; nel quarto segue una panoramica sui meccanismi di trasmissione monetari e di portafoglio con l'applicazione, tratta dal Verbeek, in R del test di Johansen con più di una relazione; nel quinto lo sviluppo di un problema di allocazione ottimale della ricchezza ed un'indagine sulla misurazione dell'avversione al rischio in contesti di incertezza. Nell'appendice si evidenzia la struttura fondamentale di R come linguaggio di programmazione con particolare attenzione al dialogo con Python tramite la biblioteca di funzioni **rpy**.

II Che cos'è R

R è un ambiente statistico distribuito gratuitamente in Internet sotto **licenza GPL** e sviluppato da un team di ricercatori in ambito statistico ed informatico di fama mondiale. Esistono versioni di R per diverse piattaforme e quindi anche per i più diffusi sistemi operativi nell'ambito dei Personal Computer, cioè **Windows**, **Mac** e **Linux**. Inoltre, R costituisce un vero e proprio ambiente di programmazione, permettendo una elevatissima flessibilità nell'implementazione di funzioni di calcolo e di rappresentazione grafica statistica.
R è stato inizialmente scritto da Ross Ihaka e Robert Gentelman, del dipartimento di Statistica dell'università di Auckland, Nuova Zelanda. In seguito, un folto gruppo di persone ha dato il suo contributo, costituendo l'**R Core Team**, che dal 1997 si occupa dei codici sorgenti. Inizialmente sviluppato per sistemi **Unix**, è ora disponibile per diverse architetture e diversi sistemi operativi.
R è un **software open source** distribuibile ed implementabile liberamente, scaricabile da internet dal sito del **The R project**

for Statistical Computing http://www.r-project.org dove è possibile trovare ogni forma di supporto per il suo utilizzo. Il **Comprehensive R Archive Network** (**CRAN**) http://cran.r-project.org è dedicato specificamente al download del software e di tutta la documentazione collegata.

III Cenni introduttivi su R

R è un insieme integrato di risorse per le manipolazione dei dati, il calcolo e la visualizzazione di grafici. Ha tra le altre cose:

- un efficace manipolatore di dati ed un altrettanto efficace dispositivo di memorizzazione;
- un insieme di operatori per i calcoli su array, in particolare matrici;
- una grande, coerente, integrata raccolta di strumenti intermedi per l'analisi dei dati;
- risorse grafiche per l'analisi dei dati con visualizzazione direttamente sul pc o su carta attraverso stampante;
- un ben sviluppato semplice ed efficace linguaggio di programmazione che include istruzioni condizionali, loop, funzioni ricorsive definite dall'utente e strumenti di input/ output.

Il termine **"ambiente"** è inteso come caratteristica di un sistema pienamente pianificato e coerente, piuttosto che di un sistema che si incrementa attraverso parti molto specifiche e poco flessibili, come accade frequentemente con altri software statistici.
E' considerato un clone od un dialetto di **S**, linguaggio di programmazione sviluppato nel 1980 nei Bell Labs, noti tra l'altro per lo sviluppo del sistema operativo **UNIX** o del linguaggio **C**. In particolare, S è stato sviluppato da un gruppo di ricercatori guidati da John Chambers, che oggi fa parte anche dell'R Core team.

C'è un'importante differenza filosofica tra R (e quindi anche S) e gli altri principali ambienti statistici. In R normalmente una analisi statistica è fatta attraverso una serie di passi, con risultati intermedi che sono immagazzinati in oggetti. Così mentre **SAS** o **SPSS** daranno una produzione copiosa di risultati relativi, ad esempio, ad una analisi di regressione, R darà la minima produzione, immagazzinando i risultati in oggetti che possono essere richiamati da altre funzioni.

Come introduzione all'utilizzo di R fra le varie guide si segnalano i testi **"Una guida all'utilizzo dell'ambiente Statistico R"** di Angelo M. Mineo da cui è tratta questa breve introduzione ed **"An introduction to R"** che viene fornito insieme al software.

Capitolo 1: Mercati e fondamentali finanziari[1]

Come proporre un nuovo prodotto finanziario remunerativo? Come gestire il rischio derivante dalle fluttuazioni nei tassi di interesse, nei prezzi delle azioni o nei tassi di cambio? Un manager dovrebbe incaricare un esperto di economia monetaria per intuire i futuri sviluppi delle variabili in oggetto? Il modo migliore per affrontare queste domande è riferirci a modelli analitici tra loro integrati che facciano perno su:

- prezzo delle attività;
- struttura dei mercati finanziari;
- politica monetaria;

i cui concetti fondamentali si possono descrivere in:

- congetture sull'equilibrio;
- analisi della domanda e dell'offerta;
- ricerca del profitto;
- costi di transazione ed asimmetria informativa;
- tendenza dei mercati finanziari, tassi di interesse, tassi di cambio.

Il tentativo di analizzare congiuntamente questi aspetti dovrebbe spingere un soggetto, sia esso promotore, manager, imprenditore o semplice risparmiatore che voglia affrontare il tema del risparmio-investimento in risorse finanziarie a formarsi un bagaglio minimo di informazioni inerenti i mercati.

1.1 Una prospettiva manageriale

Per analizzare il comportamento dei prezzi e dei rendimenti sui titoli ci riferiamo all'ipotesi di **mercato efficiente** secondo la quale *i prezzi dei titoli nei mercati finanziari tengono conto di tutte le informazioni disponibili*.

"In un mercato efficiente tutte le opportunità di profitto non sfruttate vengono eliminate".

Non tutti in un mercato finanziario devono essere necessariamente informati su un titolo od avere aspettative razionali che seguano il prezzo del titolo al punto in cui si realizza la condizione di efficienza. Quest'ultima è una ipotesi ragionevole proprio perché non richiede che tutti debbano essere consapevoli di ciò che sta avvenendo ad ogni titolo in un mercato. La cosiddetta **versione**

1 Definizioni tratte da: Mishskin, Eakins, Forestieri "Istituzioni e mercati finanziari"; Simon Benninga "Modelli finanziari"; Marno Verbeek "Econometria".

forte di mercato efficiente presuppone che i prezzi riflettano il valore fondamentale dei titoli: tutti i prezzi sono sempre corretti e rispecchiano i fondamentali di mercato ovvero gli elementi che hanno effetto diretto sui flussi futuri di reddito dei titoli. Ciò comporta che:

- un investimento ha le stesse opportunità di rendimento di qualsiasi altro: *i prezzi sono corretti*;
- *il prezzo dei titoli riflette tutte le informazioni* disponibili sul valore intrinseco degli stessi;
- i prezzi possono essere usati dal manager di aziende sia finanziarie, sia non finanziarie per valutare in modo accurato il loro *costo del capitale*.

1.2 Evidenze sull'ipotesi di mercato efficiente

Tesi a favore:

- **previsioni degli analisti e rendimenti dei fondi comuni di investimento**: E' impossibile battere il mercato: quando si acquista nel mercato è impensabile guadagnare un rendimento enormemente alto, superiore a quello di equilibrio. -i fondi comuni ed i consulenti finanziari non battono il mercato. Il fatto che un analista finanziario od un fondo abbia ottenuto una buona performance in passato non implica che egli sarà in grado di ottenere risultati altrettanto buoni in futuro;
- **i prezzi delle azioni rispecchiano le informazioni pubblicamente disponibili**: gli annunci favorevoli di profitto, gli annunci di ripartizione delle azioni, in media non fanno salire i prezzi;
- **esiste un comportamento casuale dei prezzi delle azioni**: i prezzi delle azioni dovrebbero seguire a tutti gli effetti un andamento quasi casuale (**random walk**), ovvero i cambiamenti futuri nei prezzi delle azioni dovrebbero a tutti gli scopi pratici, essere imprevedibili. *Solo informazioni non disponibili al mercato permettono ad un investitore di avere sempre successo*. Gli economisti ricorrono a due tipi di prove: esaminano la registrazione del mercato per vedere se vi sono elementi sistematici nelle variazioni dei prezzi[2]; vedono se le informazioni pubblicamente disponibili avrebbero potuto essere utilizzate per prevedere i cambiamenti. I risultati sembrano confermare l'ipotesi di efficienza e di random walk;
- **performance dell'analisi tecnica**: metodo diffuso per la previsione dei prezzi azionari basate sulla regolarità che emerge dallo studio dei prezzi storici. Le performance non sono migliori di quelle degli altri analisti finanziari. Le regole sviluppate sulla compravendita delle azioni in relazione ai profitti non battono il mercato.

2 Segue una proposta di analisi tecnicamente più dettagliata nei seguenti capitoli.

Tesi contro:

- **effetto "piccole dimensioni"**: le società di piccole dimensioni hanno ottenuto rendimenti straordinariamente alti per periodi di tempo insolitamente lunghi, anche tenendo conto del maggiore rischio che caratterizza queste aziende. Questo a causa di: ribilanciamento dei portafogli degli investitori istituzionali, questioni di tassazione, minore liquidità delle azioni di piccole società, costi delle informazioni per le valutazioni, considerazione inadeguata del rischio. L'effetto sembra essere diminuito negli ultimi anni.
- **"effetto gennaio"**: su periodi di tempo lunghi le azioni mostrano una tendenza ad un aumento anomalo dei prezzi tra dicembre e gennaio, un aumento prevedibile che contraddice il random walk. Diminuito negli ultimi anni per le società di grandi dimensioni, sembra dovuto a ragioni fiscali - vendita delle azioni prima della conclusione dell'anno per deduzione perdite in C/capitale - permane per le piccole imprese.
- **eccesso di volatilità**: in pratica le fluttuazioni nei prezzi delle azioni possono essere di molto superiori a quanto è deducibile sulla base delle variazioni del loro valore fondamentale. Robert Shiller[3] ha riscontrato che le fluttuazioni dell'indice S&P500 non potevano essere giustificate da quelle nei dividendi delle azioni che compongono questo indice od in generale i prezzi di mercato delle azioni, sembrano essere guidati da fattori che vanno al di là del loro valore fondamentale
- **ritorno alla media**: i titoli che oggi tendono ad avere rendimenti bassi, tendono ad averli alti nel futuro e viceversa. Sono evidenze discutibili.
- i **prezzi azionari non incorporano immediatamente le nuove informazioni**:talvolta esse non si adattano immediatamente agli annunci sui profitti.

In mercati efficienti

- l'investitore **non** dovrebbe tentare di giocare d'anticipo sul mercato, continuando a comprare e vendere titoli, dati gli elevati costi di transazione;
- dovrebbe invece perseguire la strategia **"buy & hold"** che condurrà in media agli stessi rendimenti ma con costi di transazione minori;
- poiché l'ipotesi di mercato efficiente presuppone che nessun fondo comune possa battere il mercato, si dovrebbe ricercare i fondi **"no-load"**, con costi di gestione molto bassi.

Eventi accaduti nei mercati hanno convinto gli economisti che la versione forte di mercato efficiente non è affatto scontata! *La*

3 Robert Shiller, "Do Stock Prices Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?", American Review 71, 1981, pp. 421-436.

struttura del mercato e la psicologia degli agenti che vi operano sembrano avere un ruolo significativamente elevato nella determinazione dei prezzi. Come dimostrano le cosiddette **bolle speculative razionali**, quando il prezzo delle attività differisce dal suo valore fondamentale e tuttavia viene conservato date le ragionevoli aspettative di rialzo.
Gli s**mart money** che dovrebbero ridurre le opportunità di profitto non sfruttate e portare i mercati all'efficienza - vendere quando il prezzo sale in modo irrazionale - devono poter contare sulle vendite allo scoperto, con le quali gli investitori prendono a prestito azioni dai loro intermediari, rivendendole nel mercato confidando di ottenere un profitto quando il prezzo scende. Sono tuttavia influenzati dal fenomeno di **avversione alle perdite**, proporzionalmente maggiore della **propensione al guadagno**, che limita tale tipo di vendite limitando così l'efficienza.
Vi sono inoltre fenomeni di **overconfidence** - propensione a seguire il proprio istinto - e **contagio sociale** - immotivato dilagante ottimismo che porta a fidarsi delle ascese del mercato - tutti fenomeni di recente studio della cosiddetta branca della **finanza comportamentale.**

In conclusione: *"sembrano esserci importanti violazioni della ipotesi di mercato efficiente"*.

1.3 Una guida pratica agli investimenti

Per quanto concerne i mercati monetari essi rappresentano una fonte temporanea di fondi a basso costo. I tassi di interesse degli strumenti di mercato monetario tendono ad assumere un andamento molto simile: tutti hanno un rischio relativamente basso e scadenze a breve o brevissimo termine. Gli strumenti sono negoziati generalmente in mercati efficienti e sono fra loro sostituti quasi perfetti: di conseguenza se un tasso si allontana temporaneamente dagli altri le forze sul mercato della domanda e dell'offerta danno prontamente luogo ad una correzione.
La **liquidità** dei titoli si riferisce a quanto rapida ed economica è la loro convertibilità in moneta. Normalmente è la **profondità** - quantità degli ordini di compravendita dei titoli - del **mercato secondario**[4] - dove possono essere venduti i titoli - che determina la liquidità. Infatti la presenza di molti ordini di acquisto e vendita a prezzi prossimi a quelli negoziati dà stabilità alle quotazioni e rende improbabile il formarsi di gap tra domanda ed offerta. Per esempio i Buoni ordinari del Tesoro (BOT) possono essere convertiti rapidamente in contanti e con costo contenuto.

Infatti il rendimento di un BOT si calcola, nel caso semplice e composto, nel modo seguente:

4 I **mercati primari** sono quelli in cui vengono emessi i titoli.

Rendimento di un BOT

$$i_{yt} = (\frac{VN}{P} - 1) * \frac{360}{n} \qquad semplice$$

$$i_{yt} = (\frac{VN}{P})^{\frac{360}{n}} - 1 \qquad composto$$

$$con:$$

$$n = numero\ di\ giorni\ mancanti\ a\ scadenza\ ;\ \ VN = Valore\ Nominale\ ;\ \ P = prezzo\ di\ acquisto\ ;$$
$$i_{yt} = rendimento\ annuale\ dell'investimento.$$

I commercial paper vengono invece tenuti fino a scadenza.
La profondità del mercato secondario non è critica per i titoli del mercato monetario, a breve termine, quanto piuttosto per i titoli a lungo termine, come azioni ed obbligazioni. Tuttavia molti investitori preferiscono la liquidità, per cui si riferiscono agli intermediari, che la forniscono dove manca. Questa è una delle funzioni dei **fondi comuni d investimento** del mercato monetario.

Per quanto concerne i mercati obbligazionari, quando i tassi di interesse cambiano, una obbligazione con vita residua più lunga è soggetta a variazioni di prezzo superiori e quindi ad un maggior rischio. Un manager, od un investitore, deve ricorrere al concetto di durata media finanziaria, o **Duration**, vale a dire il tempo di vita medio di un flusso di pagamenti sui titoli di debito. Essa è strettamente legata alle caratteristiche del titolo - vita residua, livello e periodicità delle cedole - ed è un indicatore sintetico del **rischio di tasso di interesse**, perchè permette di misurare la variazione del prezzo a seguito della variazione del livello dei tassi di interesse. La formula è la seguente:

Duration

$$Duration = \sum_{t=1}^{n} \frac{t * \frac{FC_t}{(1+TRES)^t}}{\frac{FC_t}{(1+TRES)^t}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{t * \frac{FC_t}{(1+TRES)^t}}{P}$$

$$con:$$

$$t = periodo\,(anni, mesi, giorni)\ ;\ \ FC = Flussi\ di\ cassa\ ;\ \ P = prezzo.$$

Una obbligazione con VN e pagamento delle cedole periodiche può essere scomposta in una serie di titoli a scadenza senza cedola (ZCB) in progressione periodale - in genere annuale. La duration di questa serie è rappresentata dalla media ponderata delle scadenze effettive (**cash flow**) delle singole obbligazioni senza cedola. A parità di condizioni:

- quanto maggiore è la vita residua di una obbligazione, tanto maggiore è la sua duration;
- quando i tassi di interesse aumentano, la duration delle obbligazioni con cedola diminuisce;
- quanto più elevata è l'entità delle cedole, tanto minore è la

duration dell'obbligazione.

Esiste quindi una relazione inversa tra vita residua e duration e tra entità delle cedole e duration. La variazione dei prezzi è maggiore quando il livello dei rendimenti di partenza è minore.

La **duration di portafoglio** rappresenta la media ponderata delle duration dei singoli titoli con pesi che riflettono le proporzioni del portafoglio, cioè

Duration di portafoglio

$$percent_1 * D_1 + percent_2 * D_2 + ... + percent_n * D_n$$

$$con:$$

$$percent_n = percentuale\ (peso)\ di\ portafoglio;\ D_n = Duration\ \ n-esima$$

La duration è utile per fornire una buona approssimazione di quanto si modifica il prezzo dei titoli a fronte di variazioni nei tassi di interesse. Quanto più è elevata, tanto più grande è la variazione percentuale nel valore di mercato del titolo per una determinata variazione nei tassi di interesse, tanto più elevato è il rischio connesso. La formula è la seguente:

Duration modificata

$$percent\ \Delta P \approx -D * \frac{\Delta TRES}{1 + TRES}$$

$$con:$$

$$percent\ \Delta P = \frac{(P_{t+1} - P_t)}{P_t}.$$

Il calcolo della duration viene anche detto volgarmente procedimento di **immunizzazione finanziaria.**

Per quanto concerne <u>i mercati azionari</u> quali sono le regole da seguire per poter guadagnare? Quanto sono affidabili i rapporti pubblicati dagli analisti finanziari? L'ipotesi di mercato efficiente suggerisce di essere scettici rispetto alle "notizie di strada", poiché in efficienza il mercato avrà già variato il prezzo delle azioni in modo che i rendimenti attesi siano uguali a quelli di equilibrio $R^e = R^{eq}$. Solo se si è i primi fortunati percettori dell'informazione è possibile rivestire il ruolo di speculatore per $R^e > R^{eq}$ e sfruttare la possibilità di arbitraggio.
Per determinare il valore delle azioni vi sono vari modelli impostati sulla logica cardinale della valutazione a sconto - attualizzazione - dei flussi di cassa. I principali sono:

Modello uniperiodale

$$P_0 = \frac{D_1}{1 + k_e} + \frac{P_1}{(1 + k_e)}$$

Modello generalizzato

$$P_0=\frac{D_1}{1+k_e}+\frac{D_2}{(1+k_e)^2}+\ldots+\frac{D_n}{(1+k_e)^n}+\frac{P_n}{(1+k_e)^n} \quad da\ cui \quad P_0=\sum_1^{\infty}\frac{D_t}{(1+k_e)^t} \quad con \quad \frac{P_t}{(1+k_e)^t}\to 0$$

$$con:$$

$$n=n°\ di\ anni\ ;\ \ k_e=rendimento\ richiesto\ sugli\ investimenti\ a\ capitale\ di\ rischio\ ;$$

$$D_1=dividendo\ al\ primo\ periodo\ ;\ \ D_n=dividendo\ n-esimo\ ;$$

$$P_1=prezzo\ al\ primo\ periodo\ ;\ \ P_n=prezzo\ al\ periodo\ n.$$

Modello di Gordon

$$P_0=\frac{D_0*(1+g)}{1+k_e}+\frac{D_0*(1+g)^2}{(1+k_e)^2}+\ldots+\frac{D_0*(1+g)^{\infty}}{(1+k_e)^{\infty}} \quad da\ cui \quad P_0=\frac{D_0*(1+g)}{k_e-g}=\frac{D_1}{k_e-g}$$

$$con:$$

$$D_0=dividendo\ corrisposto\ ;\ \ g=tasso\ di\ crescita.$$

Se una azienda non sta pagando dividendi o se il suo tasso di crescita è molto irregolare è difficile valutare l'azione con i metodi tradizionali. Una soluzione sostitutiva si basa sul multiplo prezzo/utile (**price/earning**). E' un indice di quanto il mercato è disposto a pagare un'unità degli utili di una azienda:

$$multiplo\ \frac{P}{E}*utili\ attesi\ E=prezzo\ delle\ azioni\ P\ ,$$

- se è superiore alla media può significare che il mercato si aspetta un futuro incremento degli utili, nel qual caso l'indice ritornerebbe a livello normale;
- in alternativa un PE elevato può indicare che gli utili saranno caratterizzati da un basso fattore di rischio.

In particolare si suppone che la società dello stesso settore abbiano nel lungo periodo indice PE simili: si può quindi utilizzare il PE di settore per il calcolo degli utili previsti. Esso ignora tuttavia eventuali fattori specifici di rischio della azienda, cosicché necessita di una correzione da parte degli analisti, in positivo od in negativo.

Il prezzo delle azioni aumenta sempre in presenza di buone notizie? Spesso no. Dal momento che le variazioni di prezzo delle azioni sono imprevedibili, se vengono rese note informazioni, già previste dal mercato, il prezzo dei titoli rimane immutato. Varierà solo per informazioni nuove ed inattese. Non solo: se le informazioni di variazioni positive sono sotto le aspettative, il prezzo potrebbe addirittura scendere.

Per quanto concerne il <u>mercato dei cambi</u> come trarre vantaggio dalle previsioni di cambio? Ponendo attenzione all'andamento futuro dei tassi di cambio poiché questi influenzano il valore delle attività delle passività denominate in valuta estera

presenti nei bilanci delle banche.
Le istituzioni finanziarie spesso si impegnano in negoziazioni valutarie sia in proprio che per conto dei loro clienti. Le previsioni dei tassi di cambio futuri possono quindi avere un effetto rilevante sui profitti che le istituzioni finanziarie realizzano con la proprie operazioni. I gestori delle istituzioni finanziarie si procurano le previsioni assumendo economisti in grado di generarle.
I responsabili fanno riferimento alle previsioni sui tassi di cambio per decidere quali attività economiche denominate in valuta estera detenere.
Previsioni di cambio accurate possono quindi aiutare il management a generare profitti notevoli. Purtroppo la qualità delle previsioni sui cambi non è migliore di quella di qualsiasi altro mercato finanziario.

Le transazioni **spot** coinvolgono lo scambio immediato di depositi bancari; le transazioni **forward** prevedono che lo scambio di depositi avvenga in una data futura specificata nel contratto[5].
Indicando con E_t il tasso di cambio ed E^e_{t+1} il tasso di cambio previsto per t+1, possiamo definire il tasso previsto di apprezzamento dell'euro come

$$\frac{E^e_{t+1} - E_t}{E_t}.$$

Il nostro ragionamento indica che il rendimento previsto sui depositi in euro R^D in termini di valuta estera può essere rappresentato come la somma del tasso di interesse sui depositi in euro i^D più l'apprezzamento previsto dell'euro, cioè

$$R^D = i^D + \frac{E^e_{t+1} - E_t}{E_t}.$$

Il rendimento previsto sui depositi in valuta estera R^F in termini di dollari non è altro che i^F , tasso sulla valuta estera. Quindi sempre in termini di valuta estera (es. dollari) il rendimento previsto relativo sui depositi in euro viene calcolato sottraendo i^F dall'espressione appena assegnata

$$R^D_{relativo} = i^D - i^F + \frac{E^e_{t+1} - E_t}{E_t}.$$

Man mano che aumenta questo rendimento, gli statunitensi vorranno detenere più depositi in euro e meno depositi in valuta domestica.
Sappiamo che il rendimento previsto sui depositi in valuta estera R^F in termini di euro equivale al tasso di interesse sui depositi

5 A cui corrispondono i relativi **tassi spot** e **forward** od "a termine".

in valuta estera i^F più l'apprezzamento atteso dell'euro cambiato di segno, vale a dire

$$R^F_{in.\,termini\,di\,euro} = i^F - \frac{E^e_{t+1} - E_t}{E_t}.$$

Il rendimento previsto sui depositi in euro R^D in termini di euro è semplicemente i^D . Allora:

$$R^D_{relativo} = i^D - (i^F - \frac{E^e_{t+1} - E_t}{E_t}) = i^D - i^F + i^F - \frac{E^e_{t+1} - E_t}{E_t}.$$

Il punto chiave è che il rendimento previsto relativo sui depositi in euro è identico, che venga calcolato in termini di euro o di dollari.

In generale, gli **arbitraggi** sono operazioni in grado di generare un profitto certo, senza assunzione di alcun rischio di prezzo, sfruttando il disallineamento di un mercato rispetto alla sua situazione di equilibrio. Il profitto è normalmente di entità molto limitata, ma viene realizzato su grossi volumi. Tecnicamente, gli arbitraggi sono sempre costruiti stipulando contemporaneamente due o più contratti - in settori diversi, ma connessi - la cui somma genera una posizione "chiusa" ovvero una posizione il cui risultato economico finale non si modifica al modificarsi delle quotazioni di mercato.
La relazione tra tassi di cambio a pronti, tassi di cambio a termine e tassi di interesse prevalenti nei due mercati di riferimento nota come **parità coperta dei tassi di interesse** definisce i **cambi a termine di equilibrio denaro e lettera**. Nel caso euro dollaro:

Cambio a termine di equilibrio lettera (CTE^L)

$$\frac{euro^{termine}}{USD_{lettera}} = \frac{euro^{a\,pronti}}{USD_{lettera}} * \frac{(1 + i^{euro}_{lettera} * t)}{(1 + i^{USD}_{denaro} * t)},$$

Cambio a termine di equilibrio denaro (CTE^D)

$$\frac{euro^{termine}}{USD_{denaro}} = \frac{euro^{a\,pronti}}{USD_{denaro}} * \frac{(1 + i^{euro}_{denaro} * t)}{(1 + i^{USD}_{lettera} * t)}.$$

Il posizionamento dei tassi a termine all'interno dell'intervallo **CTE^L - CTE^D**[6] è assicurato dal normale operare delle forze di mercato. Nel momento in cui ha luogo uno scostamento, infatti, si apre la possibilità di realizzare operazioni di arbitraggio e la possibilità è subito colta da uno o più operatori[7]. Le conseguenze

6 Il cambio **denaro** è il prezzo al quale l'intermediario acquista valuta, il cambio **lettera** è il prezzo al quale vende.
7 Riguardo al comportamento di agenti in economie di mercato si veda Terna (2000) **"Cross Target Method"** .

degli arbitraggi sulle variabili di mercato contribuiscono a ripristinare rapidamente una nuova situazione di equilibrio (per sua natura instabile).

1.4 Il costo del capitale aziendale ed il CAPM[8]

Il metodo più diffuso per la valutazione di una azienda è quello del flusso di cassa attualizzato (FCA). Il costo del capitale aziendale è sinonimo di "tasso di sconto appropriato" da applicare ad una serie di flussi di cassa. In finanza "appropriato" significa spesso *"corretto per il rischio"*. Quindi un'altra denominazione del costo del capitale aziendale è *"tasso di sconto corretto per il rischio"* (RADR, Risk adjusted discount rate). Idealmente può essere suddiviso in due componenti:

- il **costo del capitale azionario**: ossia il tasso di sconto da applicare ai flussi di cassa azionari;
- il **costo del debito**: ossia il costo previsto dei fondi presi a prestito dall'azienda.

Per calcolare il costo del capitale azionario (detto comunemente costo dell'equity) vi sono due modelli:

- il **modello di Gordon**, che calcola il costo del capitale azionario sulla base dei dividendi previsti dell'azienda, la cui formula abbiamo già introdotto a pg. 7;
- il **Capital Asset Pricing Model** (**CAPM**), che calcola il costo del capitale azionario sulla base della correlazione tra i rendimenti dell'azione ed i rendimenti di un portafoglio di mercato, piuttosto ampio e diversificato. Il CAPM può essere anche usato per calcolare il costo del debito aziendale.

Il CAPM deriva il costo del capitale azionario dalla covarianza tra il rendimento dell'azione ed il rendimento di mercato. Si prenda ad esempio l'azione Abbott Labs vs l'indice di mercato S&P500.

Carichiamo prezzi e rendimenti dell'indice S&P500 e dell'azione Abbott (Benninga 2001).

```
> dati <- read.csv("C:\\R\\Cartel4.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1]   "PrezzoS.P500"            "RendimentoS.P500"   "PrezzoAbbott"
"RendimentoAbbott"
> summary(PrezzoS.P500)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  277.7   375.3   456.5   553.4   654.2  1229.0
```

8 Dati tratti da Benninga (2001), Verbeek (2006).

```
> summary(dati)
PrezzoS.P500   RendimentoS.P500   PrezzoAbbott    RendimentoAbbott
Min. : 277.7   Min.   :-14.580   Min.   : 4.818   Min.   :-10.690
1st Qu.: 375.3 1st Qu.: -0.815   1st Qu.:10.954   1st Qu.: -1.610
Median : 456.5 Median :  1.560   Median :13.255   Median :  2.105
Mean   : 553.4 Mean   :  1.322   Mean   :17.360   Mean   :  2.086
3rd Qu.: 654.2 3rd Qu.:  3.663   3rd Qu.:20.606   3rd Qu.:  6.008
Max.   :1229.2 Max.   : 11.160   Max.   :48.684   Max.   : 19.520
               NA's   :  1.000                    NA's   :  1.000
```

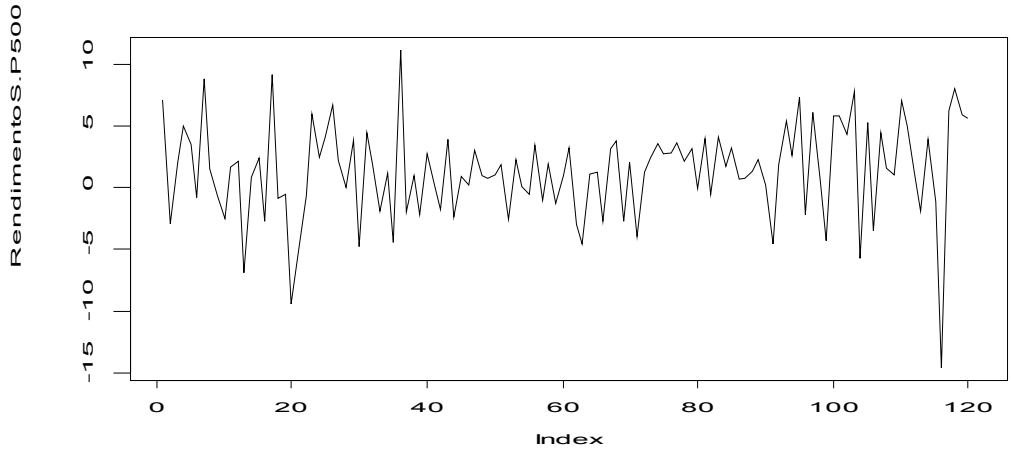
Costruiamo i grafici dei rendimenti percentuali mensili in linea, dal dicembre 88 all'aprile del 90, con la funzione plot di R, tipo "l". Ricordando che i rendimenti sono pari a

rendimenti azionari

$$r_{At} = \ln\left(\frac{P_{At}}{P_{At-1}}\right)$$

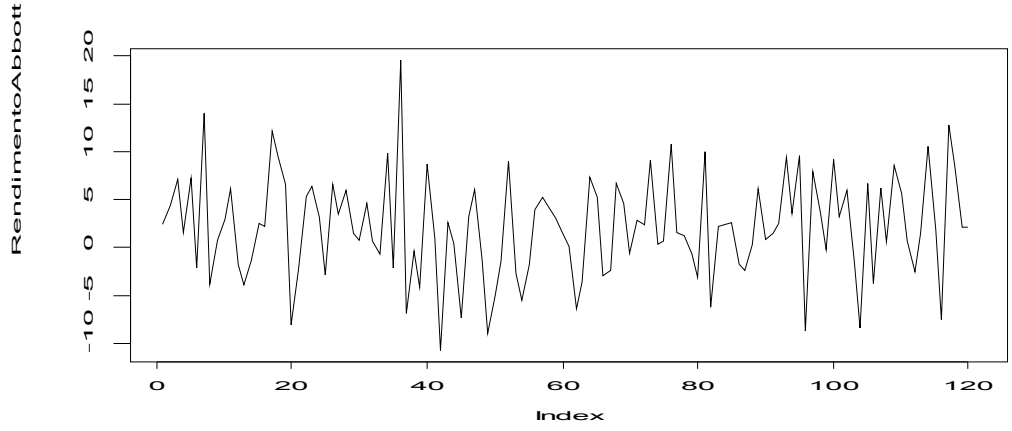
```
> plot(RendimentoS.P500, type = "l")
```

RendimentoS.P500 (dic88-apr90)




```
> plot(RendimentoAbbott, type = "l")
```

RendimentoAbbott (dic88-apr90)



Ora procediamo in questo modo:

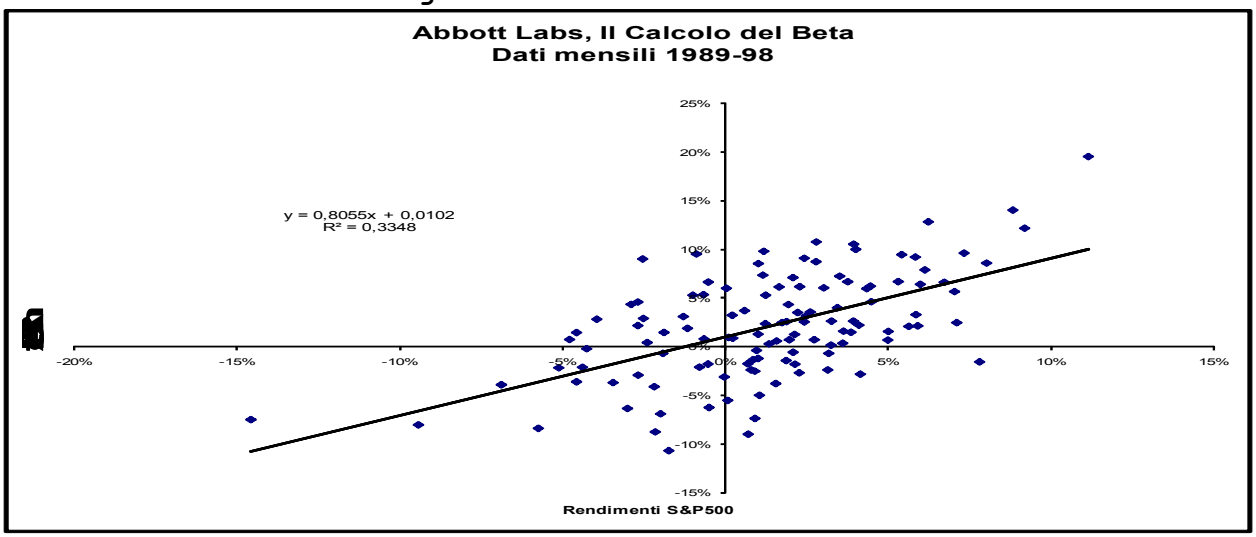
```
> reg1 <- lm(RendimentoAbbott ~ RendimentoS.P500)
> summary(reg1)

Call:
lm(formula = RendimentoAbbott ~ RendimentoS.P500)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-10.61528  -3.29158   0.08439   3.28963  10.02444
Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)        1.0212     0.4253   2.401   0.0179 *
RendimentoS.P500   0.8054     0.1045   7.705  4.5e-12 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.406 on 118 degrees of freedom
  (1 observation deleted due to missingness)
Multiple R-squared: 0.3347,     Adjusted R-squared: 0.3291
F-statistic: 59.37 on 1 and 118 DF,  p-value: 4.503e-12
```

Il β della Abbott, che indica la sensibilità del rendimento dell'azione nei confronti del rendimento di mercato, è definito come

$$\beta_{Abbot} = Cov\frac{(rendimenti\,SP500\,,\,rendimenti\,Abbot)}{Var(rendimenti\,SP500)}$$

risultato di una semplice regressione OLS.

Regressione OLS S&P Abbott



L'equazione della retta di regressione, evidenziata nel grafico precedente, rappresenta la funzione lineare che descrive nel

migliore dei modi i rendimenti della Abbot (y) in funzione dei rendimenti dell'indice S&P500 (x).
Essa indica che un incremento/decremento dell'1% dei rendimenti dell'indice S&P500 comporta un incremento/decremento dello 0,8055% dei rendimenti dell'azione della Abbott. Il coefficiente R^2 = 0,3348 indica, invece che circa il 33% dela variazione dei rendimenti della Abbott è "spiegato" dalla variazione dei rendimenti dell'indice S&P500.

"Il CAPM (Verbeek 2006) è uno dei modelli più importanti in finanza. E' un modello di equilibrio che assume che tutti gli investitori compongano i propri portafogli di attività finanziarie sulla base del **trade-off** tra rendimento atteso e la varianza del rendimento atteso del proprio portafoglio. Ciò implica che ogni investitore detiene un portafoglio detto **efficiente in senso media-varianza** caratterizzato dalla proprietà di fornire il rendimento atteso massimo per una varianza (livello di rischio) fissata. Se tutti gli investitori hanno le stesse aspettative su valori attesi, varianze e covarianze dei rendimenti delle attività finanziarie, ed in assenza di costi di transazione, imposte e limitazioni agli scambi di qualsiasi tipo, allora anche il risultato della aggregazione di tutti i portafogli individuali, il portafoglio di mercato, è efficiente in senso media varianza. In questo caso

è possibile dimostrare che i rendimenti attesi dei singoli titoli dipendono in maniera lineare dal rendimento atteso del portafoglio di mercato.

In particolare

$$E(r_{jt}-r_f)=\beta_j E(r_{mt}-r_f) \quad (1.1)$$

dove r_{jt} è il rendimento rischioso del titolo j nel periodo t, r_{mt} è il rendimento rischioso del portafoglio di mercato, r_f rappresenta il rendimento privo di rischio, che per semplicità assumiamo essere costante nel tempo. Il fattore di proporzionalità β_j è dato da

$$\beta_j=\frac{Cov(r_{jt}, r_{mt})}{Var(r_{mt})}$$

ed indica la misura con cui le oscillazioni del rendimento del titolo j sono collegate a quelle del mercato nel suo insieme. Per questo motivo β_j rappresenta una misura del **rischio sistematico** (o rischio di mercato). Essendo impossibile eliminare il rischio sistematico diversificando il portafoglio senza intaccarne il rendimento atteso gli investitori disposti ad accettare questa fonte di rischio vengono remunerati con un premio per il rischio dato da $E(r_{mt}-r_f)$.

La relazione (1.1) è un'uguaglianza ex-ante fra valori attesi non osservati. Ex-post, le osservazioni riguardano solo i rendimenti fatti registrare dai diversi titoli per un certo numero di periodi. Se, tuttavia, ci collochiamo sotto la classica ipotesi di aspettative razionali, in modo che le aspettative degli agenti economici corrispondano a valori attesi matematici, possiamo derivare una relazione che riguarda i rendimenti osservati. Per verificare questo risultato, si definiscono i rendimenti inattesi del titolo j come

$$u_{jt} = r_{jt} - E(r_{jt}),$$

ed i rendimenti inattesi del portafoglio di mercato come

$$u_{mt} = r_{mt} - E(r_{mt}).$$

E' dunque possibile riscrivere la (1.1) come

$$r_{jt} - r_f = \beta_j (r_{mt} - r_f) + \varepsilon_{jt}$$

dove

$$\varepsilon_{jt} = u_{jt} - \beta_j u_{mt}.$$

L'equazione precedente è un modello di regressione, senza intercetta, dove ε_{jt} è considerato un termine d'errore. Quest'ultimo non è stato semplicemente aggiunto al modello ma ha un significato, essendo una funzione dei rendimenti inattesi. E' facile mostrare tuttavia che esso soddisfa i requisiti minimi di consistenza (le osservazioni sono indipendenti dagli errori). Per esempio dalle definizioni di u_{jt} e u_{mt} deduciamo immediatamente che ε_{jt} ha media nulla.

$$E(\varepsilon_{jt}) = E(u_{jt}) - \beta_j E(u_{mt}) = 0$$

Esso è inoltre incorrelato con il regressore $r_{mt} - r_f$, grazie alla definizione di β_j , che può essere riformulata come

$$\beta_j = \frac{E(u_{jt}, u_{mt})}{V(u_{mt})}$$

(si noti che r_f è non stocastico), e il risultato secondo il quale

$$E[\varepsilon_{jt}(r_{mt} - r_f)] = E[(u_{jt} - \beta_j u_{mt}) u_{mt}] = E(u_{jt} u_{mt}) - \beta_j E(u_{mt}^2) = 0.$$

Sulla base di questi risultati l'OLS è uno stimatore consistente di β_j . Se in aggiunta imponiamo che ε_{jt} sia indipendente da $r_{mt} - r_f$ e le ipotesi di **omoschedasticità** ed **assenza di**

autocorrelazione, possiamo utilizzare il risultato asintotico

$$\sqrt{n}(\beta^{campionario}-\beta)\rightarrow N(0,\sigma^2,\Sigma^{-1}{}_{xx})$$

ed il risultato approssimato sulla distribuzione

$$b\sim N[\beta,s^2(\sum_{i=1}^{N}x_i x'_i)^{-1}]$$

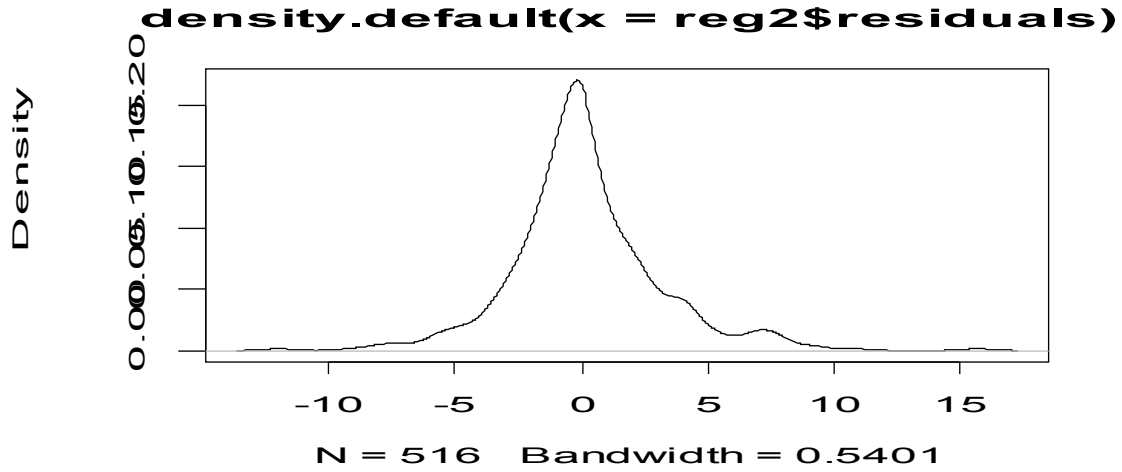
con b stimatore OLS, per definire una regressione OLS valida".

Prendiamo spunto dalla proposta di Verbeek di rianalizzare i dati del libro, scaricabili dal sito http://eu.wiley.com/legacy/wileychi/verbeek2ed con R. Si procede con tre regressioni senza intercetta:

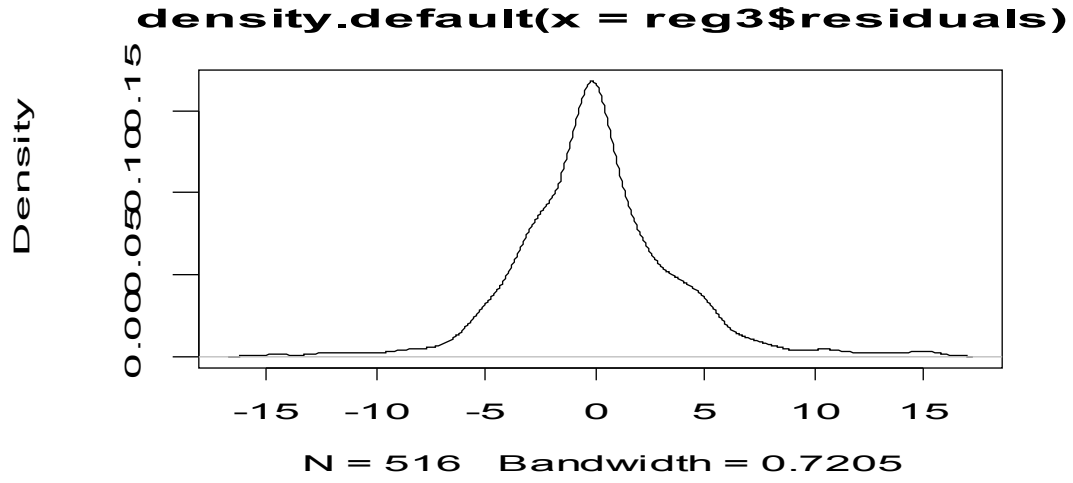
```
> dati <- read.csv("C:\\R\\Cartel9.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1] "RFOOD"  "RDUR"   "RCON"   "RMRF"   "RF"     "JANDUM"

> r1 <- RMRF - RF
> r2 <- RFOOD - RF
> r3 <- RDUR - RF
> r4 <- RCON - RF
```

RMRF sono i rendimenti di mercato, RF i rendimenti del titolo non rischioso, RFOOD alimentari, RDUR beni durevoli, RCON costruzioni.

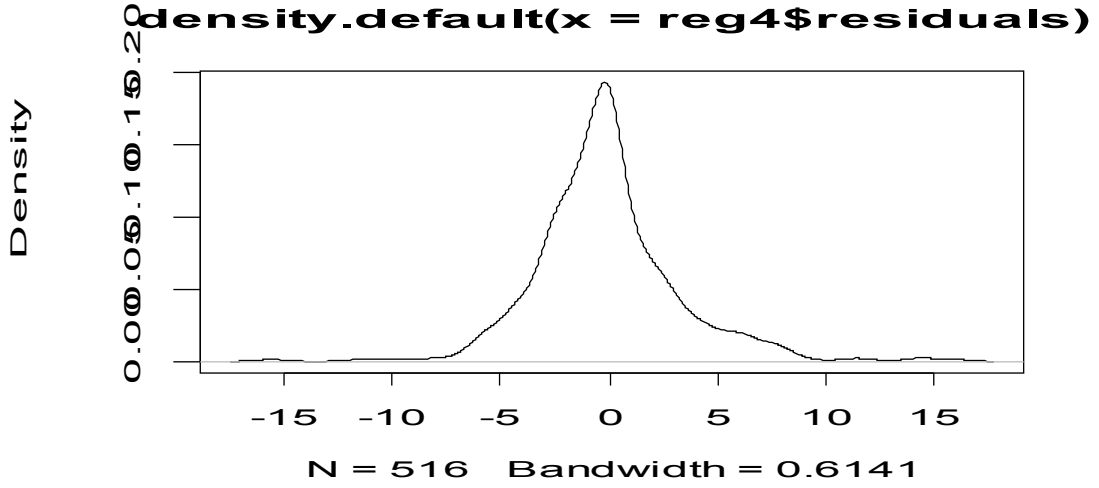
```
> reg2 <- lm(r2 ~ 0 + r1)
> summary(reg2)

Call:
lm(formula = r2 ~ 0 + r1)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-11.99567  -1.38045  -0.07657   1.42415  15.67032

Coefficients:
   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
r1  0.72421    0.03162   22.91   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.932 on 515 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5047,     Adjusted R-squared: 0.5037
F-statistic: 524.7 on 1 and 515 DF,  p-value: < 2.2e-16
```




```
> reg3 <- lm(r3 ~ 0 + r1)
> summary(reg3)

Call:
lm(formula = r3 ~ 0 + r1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.5782  -2.0115  -0.0691   1.7296  15.1140

Coefficients:
   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
r1   0.9405     0.0390   24.11   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 3.617 on 515 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5303,     Adjusted R-squared: 0.5294
F-statistic: 581.5 on 1 and 515 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



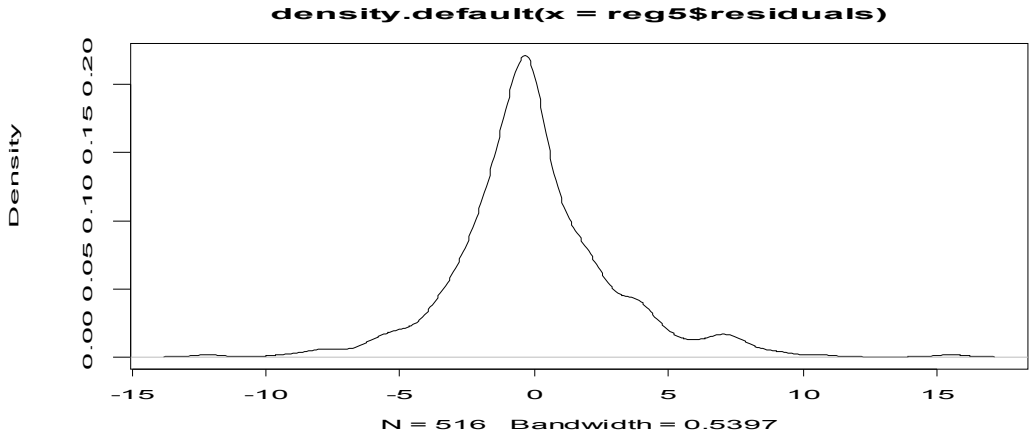
```
> reg4 <- lm(r4 ~ 0 + r1)
> summary(reg4)

Call:
lm(formula = r4 ~ 0 + r1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-15.5698  -1.9781  -0.1956   1.2105  15.8819

Coefficients:
   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
r1  1.00802    0.03523   28.61   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
Residual standard error: 3.267 on 515 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6138,     Adjusted R-squared: 0.6131
F-statistic: 818.7 on 1 and 515 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



La stima dei coefficienti β indica in che misura il valore dei portafogli settoriali è sensibile alle oscillazioni del mercato nel suo complesso. Ad un extra rendimento di mercato del 10% corrisponde un extra rendimento atteso del 7,24%, del 9,405% e del 10,08% per i portafogli dei settori alimentare, dei beni durevoli e delle costruzioni.

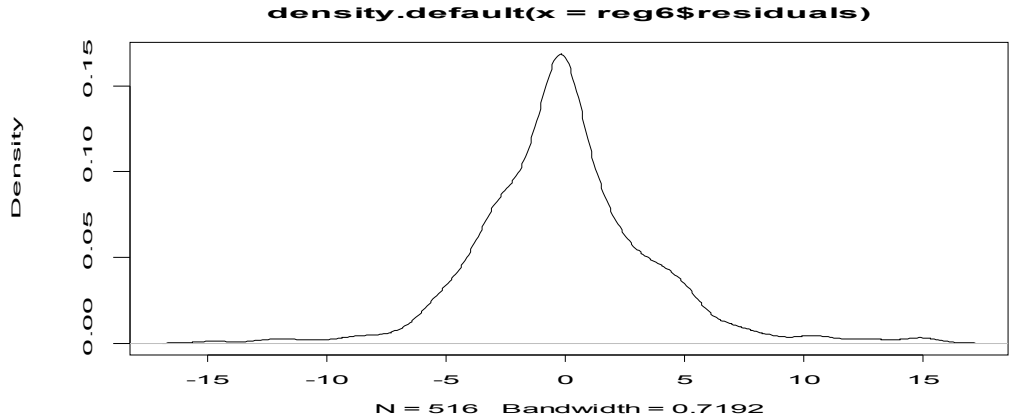
Dato che il CAPM implica che l'unica variabile esplicativa rilevante nella regressione è l'extra rendimento del portafoglio di mercato, qualsiasi altra variabile dovrebbe avere coefficiente nullo. Per controllare questa affermazione ristimiamo i modelli includendo l'intercetta.

```
> reg5 <- lm(r2 ~ r1)
> summary(reg5)

Call:
lm(formula = r2 ~ r1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-12.1646  -1.5353  -0.2337   1.2671  15.5416

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.15621    0.13080   1.194    0.233
r1           0.73053    0.03204  22.799   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.93 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5028,     Adjusted R-squared: 0.5018
F-statistic: 519.8 on 1 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

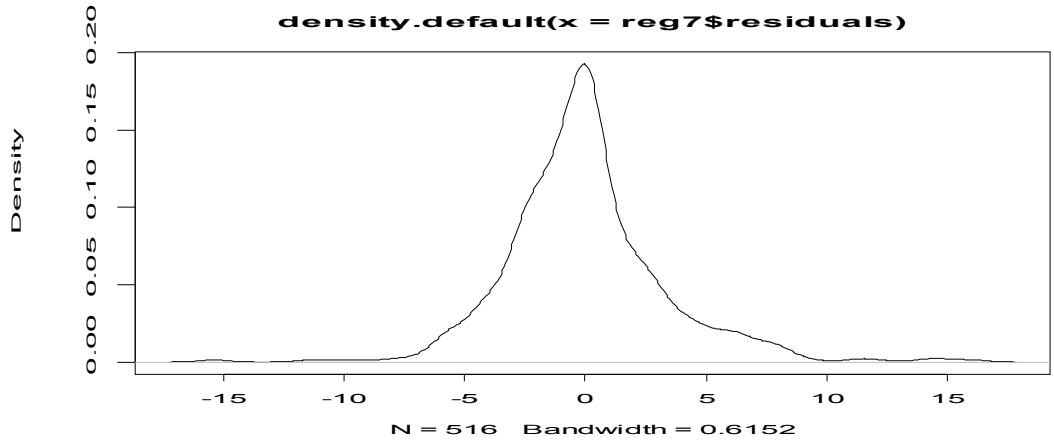



```
> reg6 <- lm(r3 ~ r1)
> summary(reg6)

Call:
lm(formula = r3 ~ r1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.6734  -2.0610  -0.1331   1.6736  15.0545

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.05843    0.16157   0.362    0.718
r1           0.94287    0.03958  23.823   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 3.62 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5247,     Adjusted R-squared: 0.5238
F-statistic: 567.5 on 1 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```




```
>  reg7 <- lm(r4 ~ r1)
> summary(reg7)

Call:
lm(formula = r4 ~ r1)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-15.37794  -1.86784  -0.08242   1.32654  16.00046

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.11780    0.14587  -0.808     0.42
r1           1.00326    0.03573  28.077   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 3.268 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6053,     Adjusted R-squared: 0.6045
F-statistic: 788.3 on 1 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



La stima delle intercette delle regressioni indicano che per reg5, il rendimento atteso è superiore a quello previsto dal CAPM dello 0,16% al mese, per reg6 è inferiore dello 0,11%. Si può notare che l'output delle due sequenze di stima sono molto simili.

In queste regressioni (Verbeek 2006) gli R^2 hanno una interpretazione economica interessante. L'equazione teorica di regressione del modello ci consente di scrivere la seguente relazione

$$V(r_{jt}) = \beta_j^2 V(r_{mt}) + V(\varepsilon_{jt}),$$

che mostra come la varianza del rendimento di un titolo (o di un portafoglio) consista di due componenti: una collegata alla varianza dell'indice di mercato, ed un'altra **idiosincratica**. In termini economici

"il rischio totale è pari al rischio di mercato più il rischio idiosincratico".

Il primo è determinato da β_j, ed è remunerato. Il secondo non viene remunerato perchè può essere eliminato ricorrendo alla **diversificazione:** un portafoglio ben diversificato è composto da un gran numero di titoli con caratteristiche diverse, e con componenti di rischio specifico che si compensano fra loro quasi completamente, lasciando così solo il rischio di mercato. Il coefficiente R^2 misura la percentuale di variabilità totale spiegata dal modello, ed è dunque una stima dell'importanza relativa del rischio di mercato per ciascuno dei portafogli fattoriali. I risultati mostrano che, approssimativamente il 50,28% del rischio (varianza) del portafoglio del settore alimentare è dovuto al mercato nel suo insieme , mentre il 49,72% è composto dal rischio idiosincratico (specifico di settore). Il grado di diversificazione sembra essere maggiore nei settori dei beni durevoli e delle costruzioni. La distribuzione dei residui sono visibilmente prossimi ad una normale, come i grafici precedenti mostrano, soddisfacenti per ipotesi le condizioni OLS.

Testiamo tuttavia queste affermazioni.

Abbiamo ricordato che l'inferenza sulla regressione lineare si basa su tre assunzioni

- **Normalità dei residui**
- **Omoschedasticità**, ovvero Var[ε | X=x]= σ^2
- **Residui incorrelati**, ovvero E[$\varepsilon_i \varepsilon_j$ |X=x]=0

Per controllare che vengano rispettate le ipotesi, R fornisce una serie di test tipicamente usati nell'analisi econometrica.

Il momento terzo o **indice di asimmetria** della serie è:

$$skewness = \frac{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^3}{\sigma^3}$$

```
> skewness(reg5$residuals)
[1] 0.5298377
```

il momento quarto o **indice di curtosi** è:

$$kurtosis = \frac{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\mu)^4}{\sigma^4}$$

```
> kurtosis(reg5$residuals)
[[1] 5.862855
```

La distribuzione presenta simmetria riconducibile a quella di una normale ma un accentuato livello di leptocurtosi.
Per quanto concerne l'**autocorrelazione** possiamo usare i test di **Durbin-Watson** oppure il test di **Breusch-Godfrey:**

```
> library(lmtest)
Carico     il     pacchetto     richiesto:     zoo

> dwtest(reg5)

        Durbin-Watson test

data:  reg5
DW = 1.9089, p-value = 0.1492
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0

> bgtest(reg5, order = 1)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 1

data:  reg5
LM test = 1.0356, df = 1, p-value = 0.3089
```

Entrambi i test rigettano l' H^1 di autocorrelazione seriale se fissiamo il livello di significatività a 0,05, DW è prossimo a 2 e BG è minore di 3.841.
Non è raro che due diverse statistiche test forniscano risposte diverse; in questi casi è opportuno riferirsi alla potenza del test. Se è dato calcolarla si utilizzerà il test di **potenza** maggiore, in modo che al pari di significatività si riduce al massimo l'errore di II tipo. Il test Breusch-Godfrey permette di calcolare se ci sono **correlazioni superiori al primo ordine** (|i-j|

>1): con il comando "order = |i - j|". Ad esempio

```
> bgtest(reg5, order = 2)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 2

data:  reg5
LM test = 3.2836, df = 2, p-value = 0.1936
```

In questo caso non sembra esserci autocorrelazione seriale: BG è minore di 5.991.
Ricordiamo che il **p-valore** è il livello esatto di significatività definito come la probabilità di ottenere, sotto l'ipotesi nulla, un valore della statistica del test più sfavorevole all'ipotesi nulla stessa. In pratica definisce il più basso livello di significatività α che conduce a rifiutare l'ipotesi nulla: se il p-valore è minore (maggiore) del livello di significatività prescelto, l'ipotesi nulla verrà rifiutata (non rifiutata).

Per quanto concerne la varianza, anche se i residui non sono correlati, possono esserci problemi legati alla **eteroschedasticità.** Per testare l'**omoschedasticità** possiamo usare il test di Breusch-Pagan attraverso il comando **bptest**

```
> bptest(reg5)

        studentized Breusch-Pagan test

data:  reg5
BP = 1.4173, df = 1, p-value = 0.2339
```

L'ipotesi di omoschedasticità sembra confermata: BP è minore 3.841. Nel caso in cui il test rifiutasse l'ipotesi di omoschedasticità, avremmo in pratica una varianza funzione delle k covariate, nel qual caso dovremmo operare con i **GLS** o con la stima robusta della matrice **VAR-COV.**

Per meglio capire il funzionamento di questi test modifichiamo il vettore r2 aggiungendo un multiplo del termine di errore x che definiamo come vettore di 516 elementi distribuiti con media approssimativamente nulla, indice di simmetria approssimativamente nullo ed indice di curtosi pari a 3. Utilizziamo **arima.sim:**

```
> x <- arima.sim(list(order = c(2, 0, 0), ar = c(1e-06,0.7)), n =
516)
> r2New <- r2 + 3 * x
> reg5New <- lm(r2New ~ r1)
> summary(reg5New)

Call:
lm(formula = r2New ~ r1)
```

```
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-12.3509  -3.0943  -0.3344   2.9607  18.1390

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.35011    0.21337  -1.641    0.101
r1           0.75070    0.05227  14.363   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.78 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2864,     Adjusted R-squared: 0.285
F-statistic: 206.3 on 1 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Abbiamo aggiunto rumore alla serie r2 e notiamo che gli std errors sono più elevati

reg5

```
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-12.1646  -1.5353  -0.2337   1.2671  15.5416

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.15621    0.13080   1.194    0.233
r1           0.73053    0.03204  22.799   <2e-16 ***
```

Per quanto concerne l'autocorrelazione:

```
> dwtest(reg5New)

        Durbin-Watson test

data:  reg5New
DW = 2.1758, p-value = 0.9771
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0

> bgtest(reg5New)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 1

data:  reg5New
LM test = 3.9931, df = 1, p-value = 0.04569

> bgtest(reg5New, order = 2)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 2
```

```
data:  reg5New
LM test = 81.1487, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

BG e DW risultano discordanti. BG ci allerta sulla possibile presenza di una qualche forma di autocorrelazione nei residui con un LM^1 >3.841 ed un LM^2 >5.991.

Per quanto concerne l'eteroschedasticità un test su Reg5New

```
>  bptest(reg5New)

        studentized Breusch-Pagan test

data:  reg5New
BP = 1.0996, df = 1, p-value = 0.2944
```

indica un BP contenuto nei valori di soglia.
Anche se i residui non sono autocorrelati, possono esserci dei problemi legati alla assunzione di omoschedasticità degli stessi. Questo vuol dire che la varianza di ϵ_i non è costante. Modifichiamo la variabile r2 in modo tale da simulare proprio questa situazione permettendoci di stilare un profilo operativo del caso.

```
> r2New0 <- r2 + rnorm(516, 0, 0.8 * abs(r1))
> reg5New0 <- lm(r2New0 ~ r1)
> summary(reg5New0)

Call:
lm(formula = r2New0 ~ r1)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-17.84113  -1.76709  -0.04345   1.88879  21.96759

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.002684   0.183402   0.015    0.988
r1          0.662077   0.044927  14.737   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.109 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.297,      Adjusted R-squared: 0.2956
F-statistic: 217.2 on 1 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16

>  bptest(reg5New0)

        studentized Breusch-Pagan test

data:  reg5New0
BP = 5.1314, df = 1, p-value = 0.02350
```

Dal test scopriamo che l'assunzione di omoschedasticità non è affatto soddisfatta - BP > 3.841 - ed il p-value è bassissimo, anche se i residui non sono correlati, infatti

```
> dwtest(reg5New0)

        Durbin-Watson test

data:  reg5New0
DW = 1.989, p-value = 0.4491
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0

> bgtest(reg5New0)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 1

data:  reg5New0
LM test = 0.0155, df = 1, p-value = 0.9009
```

Questo potrebbe significare che la varianza dei residui sia funzione delle covariate (eteroschedasticità): in questo caso r1.

```
> regVAR <- lm(reg5New0$residuals^2 ~ r1)
> summary(regVAR)

Call:
lm(formula = reg5New0$residuals^2 ~ r1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-33.4813 -16.1630 -12.7079   0.1215 455.1827

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  16.1377     1.8134   8.899   <2e-16 ***
r1           -1.0094     0.4442  -2.272   0.0235 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 40.63 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.009944,   Adjusted R-squared: 0.008018
F-statistic: 5.163 on 1 and 514 DF,  p-value: 0.02349
```

Se si assume un modello lineare di questo tipo per la varianza condizionale di riferimento possiamo usare i GLS per ottenere standard errors corretti. Partendo da **regVAR** otteniamo i valori previsti dalla varianza, cioè $\hat{\sigma}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 x_i$. Questo si può fare facilmente perchè uno degli elementi dell'oggetto "lm" è proprio il valore predetto della variabile dipendente; quello che ci serve è dunque il vettore **regVAR$fitted**. Quindi possiamo calcolarci i nuovi regressori e la nuova variabile (Mazzuco 2006).

```
> newy <- r2New0/regVAR$fitted
> newx <- r1/regVAR$fitted
> x0 <- 1/regVAR$fitted
> reg5New1 <- lm(newy ~ 0 + x0 + newx)
> summary(reg5New1)

Call:
lm(formula = newy ~ 0 + x0 + newx)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.34349 -0.07979  0.02195  0.16029  1.43281

Coefficients:
     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
x0   -0.29510    0.29121  -1.013    0.311
newx  1.05378    0.02217  47.540   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.4091 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.94,      Adjusted R-squared: 0.9397
F-statistic:  4023 on 2 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Questa procedura **GLS** (**Generalized Least Square**) è però rischiosa, nel senso che se il modello non è ben specificato questo si riperquote negativamente sulla consistenza delle stime GLS. Più sicuro è ottenere una stima robusta della varianza. Il comando che ci serve è contenuto nella biblioteca **"sandwich"**. Con il comando **vcovHC()** stimiamo la matrice VAR-COV che ci serve. Nel caso di eteroschedasticità ed autocorrelazione sempre nella biblioteca **"sandwich"** abbiamo il comando **vcovHAC** od il comando **NeweyWest** che danno risultati molto simili.

```
> vcov(reg5New0)
             (Intercept)          r1
(Intercept) 0.033636222 0.001360161
r1          0.001360161 0.002018455

> vcovHC(reg5New0)
             (Intercept)          r1
(Intercept) 0.032923101 0.001774476
r1          0.001774476 0.005588530

>  sqrt(diag(vcov(reg5New0)))
(Intercept)          r1
 0.18340180  0.04492721

> sqrt(diag(vcovHC(reg5New0)))
(Intercept)          r1
 0.18144724  0.07475647
```

Gli **standard error di White** sono più alti di quelli calcolati sotto l'ipotesi di omoschedasticità ed i coefficienti sono significativamente diversi da zero. Considerando (Verbeek 2006) il modello $y_i = X\beta + \epsilon_i$, con Var(ϵ |X)= $\sigma^2 \Psi = Diag(\sigma_i^2)$, la matrice di varianza e covarianza corretta è data da

$$\text{Var(b|X)} = (X'X)^{-1} X' Diag(\sigma_i^2) X (X'X)^{-1}.$$

White (1980) ha mostrato che in realtà tutto ciò che è richiesto è uno stimatore consistente della matrice k*k

$$\Sigma = \frac{1}{N} X' Diag(\sigma_i^2) X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e_i^2 x_i x'_i.$$

Sotto condizioni molto generali è possibile dimostrare che

$$\text{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e_i^2 x_i x'_i,$$

dove e_i , il residuo OLS, è uno stimatore consistente di Σ. Di conseguenza per stimare la vera varianza dell'OLS possiamo usare la formula seguente

$$\text{V(b)} = (X'X)^{-1} \sum_{i=1}^{N} e_i^2 x_i x'_i (X'X)^{-1} = (\sum_{i=1}^{N} x_i x'_i)^{-1} \sum_{i=1}^{N} e_i^2 x_i x'_i (\sum_{i=1}^{N} x_i x'_i)^{-1}$$

Questo risultato consente di utilizzare **b** per effettuare correttamente inferenza sui parametri della popolazione senza in realtà richiedere una specificazione completa del tipo di eteroschedasticità. Gli standard error calcolati come radici quadrate degli elementi sulla diagonale vengono di solito chiamati **stndard error consistenti in presenza di eteroschedasticità (HC).**
Proviamo a modificare r2New in modo da originare una situazione diversa, nella quale si possa presentare l'opzione di eteroschedasticità ed autocorrelazione dei residui

```
> r2New2 <- r2New + rnorm(516, 0, 0.9 * abs(r1))
> reg5New2 <- lm(r2New2 ~ r1)
> summary(reg5New2)

Call:
lm(formula = r2New2 ~ r1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-25.0194  -3.5750  -0.2637   3.5906  30.5780
```

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.35378    0.27323  -1.295    0.196
r1           1.03908    0.06693  15.524   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 6.122 on 514 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3192,     Adjusted R-squared: 0.3179
F-statistic:   241 on 1 and 514 DF,  p-value: < 2.2e-16

> dwtest(reg5New)

        Durbin-Watson test

data:  reg5New
DW = 2.1758, p-value = 0.9771
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0

> bgtest(reg5New)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 1

data:  reg5New
LM test = 3.9931, df = 1, p-value = 0.04569

> bgtest(reg5New2, order = 2)

        Breusch-Godfrey test for serial correlation of order 2

data:  reg5New2
LM test = 24.2993, df = 2, p-value = 5.29e-06

> bptest(reg5New2)

        studentized Breusch-Pagan test

data:  reg5New2
BP = 6.5704, df = 1, p-value = 0.01037
```

DW e BG sono discordanti; di nuovo siamo allertati dal bgtest sulla presenza di autocorrelazione e BP ci avvisa che c'è anche eteroschedasticità.
Anche in questo frangente ci viene in aiuto la biblioteca **“sandwich”** con il comando **vcovHAC** o **NeweyWest**

```
> vcovHAC(reg5New2)
            (Intercept)          r1
(Intercept)  0.07622861 0.01259422
r1           0.01259422 0.01419850
```

```
> NeweyWest(reg5New2)
             (Intercept)          r1
(Intercept)  0.09386439 0.01234105
r1           0.01234105 0.01944570
```

che danno risultati molto simili.

Consideriamo nuovamente (Verbeek 2006) il modello di base $y_t = x'_t\beta + \epsilon_t$ dove ϵ_t è un termine di errore autocorrelato. Se questa è la specificazione alla quale siamo interessati per esempio perchè vogliamo stimare il valore atteso condizionale di y_t dato un vettore x_t , possiamo scegliere se applicare l'approccio GLS od OLS correggendone opportunamente gli standard error. Quest'ultimo approccio è particolarmente utile quando è possibile assumere che la correlazione tra ϵ_t ed ϵ_{t-s} è nulla oltre un certo ritardo h, e/o quando non valgono le condizioni alla base della consistenza dello stimatore GLS.

Se $E(x_t\epsilon_t)=0$ e $E(\epsilon_t\epsilon_{t-s})=0$ per s=H,H+1,..., lo stimatore OLS è consistente e la sua matrice di covarianza può essere stimata da

$$V^*(b) = \left(\sum_{t=1}^{T} x_t x'_t\right)^{-1} T \; s^* \; \left(\sum_{t=1}^{T} x_t x'_t\right)^{-1}$$

dove

$$S^* = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_t^2 x_t x'_t + \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{H-1} w_j \sum_{s=j+1}^{T} e_s e_{s-j}(x_s x'_{s-j} + x_{s-j} x'_s)$$

Si noti che $W_j = 0$ otteniamo nuovamente la matrice di covarianza di White ma generalizzata. Una strategia comune consiste nel fissare $w_j = 1$ ma questa scelta può condurre in campioni finiti ad una matrice di covarianza stimata che non è definita positiva. Per evitare questa eventualità viene di solito usata la ponderazione di Bartlett, suggerita da Newey e West (1987) in questo schema di ponderazione i pesi diminuiscono linearmente con j: w_j = 1-j/H. L'uso di questa struttura di ponderazione è coerente con l'idea che l'impatto dell'autocorrelazione di ordine j diminuisce con |j|. Gli standard error calcolati in questo modo sono chiamati **standard error consistenti in caso di eteroschedasticità ed autocorrelazione (HAC),** o semplicemente **standard error di Newey e West.** Talvolta gli standard error sono usati anche quando l'autocorrelazione non può essere limitata ad H ritardi.

Calcolando gli standard error corretti

```
> sqrt(diag(vcovHC(reg5New2)))
(Intercept)          r1
  0.2933921   0.1208613
```

```
> new.se <- sqrt(diag(NeweyWest(reg5New2)))

> new.se
(Intercept)          r1
  0.3063730   0.1394478
```

il coefficiente relativo della variabile r1 è di fatto la varianza stimata e risulta decisamente più rilevante di quella calcolata sotto ipotesi di omoschedasticità

```
> vcov(reg5New2)
             (Intercept)          r1
(Intercept) 0.074657012 0.003018936
r1          0.003018936 0.004480045
```

1.5 Appendice statistica A

Come abbiamo detto un test di autocorrelazione del primo ordine molto conosciuto è quello di **Durbin Watson** che, sotto ipotesi restrittive, ha distribuzione nota in campioni finiti. Due condizioni importanti alla base di questo test sono che sia possibile trattare le x_t come deterministiche, e che x_t contenga un termine di intercetta. La prima ipotesi è importante poichè richiede che tutti i termini d'errore siano indipendenti da tutte le variabili esplicative. Questo assunto vieta la possibilità di includere variabili dipendenti ritardate. La statistica Durbin Watson è data da

$$\mathrm{dw} = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

dove e_t è il residuo OLS. Qualche semplice passaggio algebrico mostra che dw è circa $2-2\rho$, dove l'approssiamzione è dovuta a piccole differenze negli indici delle osservazioni considerate dalle sommatorie. Un valore di dw prossimo a 2 indica che il coefficiente di autocorrelazione del primo ordine ρ è vicino a zero; un valore molto più piccolo di 2 è un segnale di autocorrelazione positiva, mentre vale il contrario se dw è molto più grande di 2.
Sotto $H_0: \rho = 0$, la distribuzone di dw non dipende solo dalla numerosità campionaria T e dal numero K di variabili in x_t, ma anche dai valori effettivamente osservati delle x_t. I valori critici non possono essere tabulati per una applicazione generica ma fortunatamente è possibile calcolare i limiti superiori ed inferiori ai valori critici di dw che dipendano solo dalla

dimensione campionaria T e dal numero K di variabili in x_t. Quanto più è elevata la numerosità campionari tanto più piccola è la ragione di indeterminazione. L'esistenza di una regione di indeterminazione e la necessità di assumere la validità delle condizioni di Gauss Markov, compresa la normalità del termine di errore, costituiscono difetti importanti del test dw.

In statistica, il test **Breusch Godfrey** di correlazione di serie LM è affidabile per l'autocorrelazione nei residui di una analisi di regressione ed è considerato più generale rispetto alla norma Statistica di Durbin Watson.
Mentre la *h* statistica DW è vaida solo per regressossori non stocastici e schemi AR(1), il BG test non ha alcuna di queste restrizioni, ed è statisticamente più potente.

Si consideri una regressione lineare di qualsiasi forma, per esempio

$$Y_T = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t,1} + \alpha_2 X_{t,2} + u_t$$

dove i residui potrebbero seguire uno schema schema autoregressivo AR *(p)*, come segue:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_p u_{t-p} + \epsilon_t$$

Il modello di regressione è prima fittato con i minimi quadrati per ottenere una serie di residui del campione u_t. Breusch e Godfrey hanno dimostrato che, se il seguente modello di regressione ausiliaria è calcolabile

$$u_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t,1} + \alpha_2 X_{t,2} + \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_p u_{t-p} + \epsilon_t$$

così come l'R^2 statistico per questo modello, allora la seguente approssimazione asintotica può essere utilizzata per la distribuzione della statistica del test

$$(n-p) R^2 \ \sim \ \chi^2_p$$

dove vale l'ipotesi nulla H_0: $\rho_i = 0$ per tutti gli *i*. Cioè non esista alcuna correlazione seriale di qualsiasi ordine fino a p. Qui n è il numero di osservazioni.

Per quanto concerne il test di **Breusch Pagan (e Godfrey)**, esso costituisce un'estensione del test Goldfeld Quandt, dal momento che le varianze possono essere espresse come funzione (non necessariamente lineare) di più di una variabile. Per semplicità, si consideri la seguente relazione lineare:

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \alpha_2 z_{2i} + \ldots + \alpha_{m-1} z_{m-1,i} + u_i$$

dove u_i indica il disturbo i-esimo. L'intuizione è che per

sottoporre a test se le varianze sono omoshedastiche è sufficiente sottoporre a test l'ipotesi nulla

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0.$$

La procedura del test è la seguente:

- stimare il modello originale con OLS;
- costruire la seguente variabile:

$$p_i = \frac{e_1^2}{s^2}$$

  dove s^2 è RSS/n e RSS è la somma dei quadrati dei residui del modello originale;
- stimare la seguente equazione ausiliaria:

$$p_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \alpha_2 z_{2i} + \ldots + \alpha_{m-1} z_{m-1,i} + u_i$$

  dove u_i è il residuo i-esimo della regressione ausiliaria;
- ottenere gli ESS della equazione ausiliaria e calcolare la seguente statistica:

$$BPG = \frac{1}{2} ESS$$

  Sotto l'ipotesi nulla di assenza di eteroschedaticità, BPG ha una distribuzione asintotica χ^2 con m-1 gradi di libertà. Prefissato un livello di significatività, se il valore della statistica eccede il valore critico della distribuzione χ^2, allora si rifiuta l'ipotesi nulla di assenza di eteroschedasticità.

Capitolo 2:
Operazioni sui mercati finanziari[9]

Una presentazione della struttura e dei prodotti dei mercati finanziari ed una proposta di analisi time series (campo univariato) in R su indici di borsa.

2.1 Overview sui mercati finanziari[10]

- **2.1.1 I mercati monetari -** "I titoli del mercato monetario sono strumenti a breve termine con una scadenza originale inferiore ad un anno: essi includono *Buoni ordinari del tesoro (BOT), commercial paper, depositi interbancari, pronti contro termine, certificati di deposito, accettazioni bancarie ed eurodollari.* Vengono usati per allocare a breve termine i fondi finché non se ne abbia bisogno.
  I rendimenti sono bassi, in relazione al loro basso livello di rischio ed alla loro elevata liquidità. Molti investitori acquistano e vendono simultaneamente i titoli di questo mercato.
  Il Tesoro dei principali paesi europei e degli Stati Uniti, le banche, le imprese ed i singoli individui beneficiano di questo settore. I tassi di interesse su tutti i titoli del mercato monetario tendono ad uniformarsi con il tempo. I rendimenti dei BOT sono i più bassi, perchè virtualmente privi di rischio di insolvenza, a seguire le accettazioni bancarie ed i certificati di deposito negoziabili, perchè supportati dalla solvibilità delle grandi banche che assistono l'operazione".

- **2.1.2 I mercati obbligazionari -** "I mercati dei capitali esistono per fornire finanziamenti per le attività a lungo termine. Le famiglie, spesso attraverso *fondi pensione* o *fondi comuni di investimento*, sono investitori netti. Imprese e governi sono utilizzatori netti di questi fondi.
  I tre strumenti principali del mercato dei capitali sono le *obbligazioni*, le *azioni* ed i *prestiti ipotecari.* Le obbligazioni rappresentano il prestito contratto dall'azienda che le ha emesse; le azioni costituiscono una quota della proprietà della azienda emittente; i prestiti ipotecari sono prestiti a lungo termine garantiti da proprietà reali. Le azioni possono essere emesse solo da aziende, mentre le

9 Definizioni A. Fornasini "Mercati finanziari: scelta e gestione di operazioni speculative"(etaslibri); Mishskin, Eakins, Forestieri "Istituzioni e mercati finanziari"; Gerbino http://www.borsaprof.it
10 (Mishkin, Eakins, Forestieri 2006)

obbligazioni sia da imprese che da governi. La gestione delle aziende viene assunta dagli azionisti per proteggere ed aumentare il loro patrimonio. I possessori di obbligazioni devono invece poter contare sul contratto obbligazionario che protegge i loro interessi.
I contratti obbligazionari contengono spesso *clausole restrittive* (covenant) che limitano l'azienda rispetto a comportamenti che potrebbero aumentare il rischio e quindi la probabilità di insolvenza delle obbligazioni. Essi possiedono inoltre molte clausole che li rendono più o meno attraenti per gli investitori, quali *diritti di rimborso anticipato* (call provision), *convertibilità* od una *cassa di ammortamento* (sinking fund).
Il valore di tutte le attività finanziarie viene calcolato allo stesso modo, determinando il valore attuale dei flussi di cassa che andranno al possessore dell'attività. Il valore dell'obbligazione oscilla seguendo i prezzi di mercati correnti collegati ai tassi di interesse. Gli importi delle cedole che compongono i flussi sono invece calcolati al **tasso cedolare**".

- **2.1.3 I mercati azionari -** "Si distinguono tradizionalmente *mercati organizzati* (borsa) ed i cosiddetti *mercati over-the-counter* (OTC); tuttavia negli ultimi anni questa distinzione si sta facendo meno netta a causa dello sviluppo sempre maggiore degli scambi elettronici (reti ECN).
Il principale mercato italiano è il mercato MTA, gestito da Borsa Italiana SpA. Le azioni di questo mercato sono suddivise in tre segmenti: *Blue Chip*, *STAR* e *Standard*. Appartengono al segmento Blue Chip i titoli di società con una capitalizzazione di mercato almeno pari ad un miliardo di euro, mentre nel segmento STAR confluiscono le azioni di società "ad alti requisiti", con capitalizzazione inferiore al miliardo e superiore a 40 milioni di euro. Il segmento Standard, infine accoglie i titoli di società che non presentano "alti requisiti" e che hanno una capitalizzazione di mercato inferiore al miliardo.
Il valore delle azioni è stimato sulla base del valore attuale dei dividendi, e ciò rende il processo di valutazione molto impreciso: si ricordano il *modello di Gordon* ed l'*indice price/earnings* (PE).
L'interazione tra trader nel mercato è ciò che realmente influenza i prezzi giorno per giorno. Il trader che assegna la valutazione più alta ai titoli sarà disposto a pagare un prezzo maggiore. Via via che si renderanno disponibili nuove informazioni, gli investitori modificheranno le loro stime sul valore effettivo dei titoli e li acquisteranno o venderanno in funzione di come il prezzo di mercato si rapporta alla loro valutazione.
Poiché alcune piccole correzioni nei tassi di crescita stimati o nel rendimento richiesto danno origine a grandi

variazioni di prezzo, non sorprende che i mercati azionari siano molto volatili".

- **2.1.4 Il mercato dei cambi -** "Il prezzo della valuta di un paese espresso nei termini di una valuta estera, o *tasso di cambio*, è importante in quanto influenza sia il prezzo delle merci prodotte in quel paese e vendute all'estero sia il costo delle merci estere acquistate nel paese stesso.
  La *teoria del potere di acquisto* suggerisce che i cambiamenti a lungo temine nel tasso di cambio tra due paesi sono determinati dai mutamenti nei livelli relativi dei prezzi dei due paesi.
  Altri fattori che influenzano i tassi di cambio a lungo termine sono le *barriere commerciali*, le *esportazion*i e la *produttività*.
  I tassi di cambio sono determinati a breve scadenza dalla *parità dei tassi di interesse*, secondo la quale il rendimento previsto sui depositi nazionali è uguale al rendimento sui depositi in valuta estera.
  Qualsiasi fattore che modifichi i rendimenti previsti sui depositi nazionali od in valuta estera produce variazioni nel tasso di cambio. Tali fattori includono i cambiamenti nei tassi d'interesse sui depositi nazionali ed in valuta estera, nonché mutamenti in uno dei fattori che influenzano il tasso di cambio a lunga scadenza, e di conseguenza il tasso di cambio futuro previsto.
  Le variazioni nell'offerta monetaria conducono al cosiddetto *eccesso di reattività* del tasso di cambio, che induce variazioni più marcate nel breve periodo piuttosto che nel lungo.
  L'approccio al mercato delle attività finanziarie nella determinazione del tasso di cambio può spiegare la variabilità dello stesso, come nel caso dei movimenti dell'euro, dalla sua nascita ad oggi.
  Le previsioni sui tassi del cambio sono molto utili ai responsabili delle istituzioni finanziarie, perchè influenzano la scelta su quali attività denominate in valute dovrebbero detenere, e su quali tipi di transazioni dovrebbero essere eseguite dai loro trader nel mercato dei cambi".

2.2 Gli strumenti

Le tabelle che seguono (Gerbino 2008) descrivono brevemente le differenze più rilevanti tra i principali strumenti finanziari a disposizione dei risparmiatori che vogliono gestire da sé i propri risparmi e quotati sui mercati regolamentati italiani. Non vengono esaminati i Fondi Comuni di investimento ed i prodotti del risparmio gestito. Ognuna delle categorie è classificata in ordine

crescente di **rischio**. Col termine rischio si identifica la **volatilità** dello strumento finanziario, che rappresenta l'ampiezza e la dispersione nel tempo degli scostamenti delle quotazioni dei valori medio di periodo. In altre parole la volatilità descrive l'ampiezza e la frequenza delle oscillazioni dei prezzi, per cui maggiore è la volatilità, maggiore è il rischio di perdite o l'opportunità di guadagno.

Mercato obbligazionario (MOT)

Riguarda *Titoli di credito*, cioè prestiti contratti dallo Stato, da banche, da società. Salvo casi di insolvenza, il possessore ha diritto alla restituzione, *a scadenza*, del valore nominale nonché al pagamento degli interessi.

STRUMENTO	**PRINCIPALI CARATTERISTICHE**	**RISCHIO**	**NOTE**
TITOLI A TASSO VARIABILE	Le cedole e/o il capitale a scadenza variano al variare dei tassi di mercato.	Molto basso	L'indicizzazione mantiene le quotazioni sempre vicine al valore nominale. CCT, Obbligazioni Societarie.
TITOLI A TASSO FISSO	Cedola fissa (o senza cedola) e restituzione del valore nominale a scadenza.	Basso (se portate a scadenza)	La quotazione sale al diminuire del tasso di mercato, e viceversa. Alla scadenza converge sul valore nominale, ma prima può subire anche notevoli scostamenti. La volatilità è proporzionale alla distanza della scadenza.
OBBLIGAZIONI STRUTTURATE	Cedola e/o capitale indicizzati a determinati parametri di riferimento (azioni, indici, panieri), anche in valuta.	Medio-basso	La volatilità dipende dal parametro di riferimento. Comunque il capitale è generalmente garantito. Su quelle in valuta si aggiunge il rischio di cambio.
OBBLIGAZIONI CONVERTIBILI	Si possono convertire in una determinata	Medio	Seguono l'andamento dell'azione

	azione sottostante ad un prezzo prefissato.		sottostante. Se essa scende molto sotto il prezzo di conversione vengono considerate come semplici obbligazioni.
EUROBBLIGAZIONI	Simili alle precedenti, ma emesse da enti stranieri e quotate su circuiti internazionali non ufficiali.	Medio	Sono piuttosto illiquide ed hanno spread denaro/lettera elevato. Venderle prima della scadenza può essere difficile e costare caro, specialmente per piccole quantità.
OBBLIGAZIONI REVERSE CONVERTIBLE	Titolo obbligazionario collegato ad un'azione, che conferisce al portatore il diritto di incassare alla scadenza una cedola al di sopra dei rendimenti di mercato e di ottenere, a scelta dell'emittente, il rimborso dell'importo nominale oppure una quantità di azioni prefissata all'origine.	Alto	Il sottoscrittore si assume il rischio di discesa del titolo sottostante. Se l'azione sottostante scende molto si perde parte del capitale.

Mercato azionario (MTA)

Riguarda le *azioni*, cioè titoli che rappresentano quote di partecipazione al capitale di un'azienda. Il possessore ha diritto al dividendo (se c'è). In caso di liquidazione non è garantito il valore nominale. Si può anche perdere tutta la somma investita.

STRUMENTO	**PRINCIPALI CARATTERISTICHE**	**RISCHIO**	**NOTE**
BLUE CHIP	Le azioni più importanti per capitalizzazione e flottante, tra cui le principali 30 compongono l'indice MIB30.	Medio-Alto	Sono le più liquide e maggiormente trattate.
STAR	Azioni di società medio piccole che si	Medio-Alto	Sono abbastanza liquide. La presenza

	impegnano a particolari obblighi di informativa e dotate di sponsor che garantisce analisi periodiche e fa da Market maker.		del Market maker garantisce sempre la presenza di prezzi denaro/lettera con spread contenuti.
ORDINARIE CLASSE 1	Azioni di società medio piccole.	Medio-Alto	Alcune sono liquide, perciò manovrabili. Hanno orario di trattazione ridotto.
ORDINARIE CLASSE 2	Azioni di società piccole.	Alto	Poco liquide, molto volatili e manovrabili. Non hanno contrattazione continua.
MERCATO RISTRETTO	Azioni di società medio-piccole quotate sul mercato alternativo meno trasparente.	Alto	Poco liquide, molto volatili e manovrabili. Non hanno contrattazione continua.
NUOVO MERCATO	Azioni di società prevalentemente tecnologiche o appartenenti alla new economy.	Alto	Quasi tutte poco liquide e molto volatili. Molte sono manovrabili.

Mercato dei prodotti indicizzati (MTF-MCW)

Riguarda *Fondi e particolari warrants*, il cui valore è strettamente collegato in modo diretto e senza effetto leva al valore di indici o panieri di titoli italiani o stranieri. Consentono di operare su un intero mercato o settore, senza bisogno di comprare materialmente i singoli titoli. Il valore oscilla nella stessa misura in cui oscilla l'indice o paniere sottostante.

STRUMENTO	**PRINCIPALI CARATTERISTICHE**	**RISCHIO**	**NOTE**
BENCHMARK	Particolari warrants legati ad un indice ufficiale (relativo ad un intero settore) italiano o straniero.	Medio-Alto	Il prezzo varia nella stessa direzione e misura in cui varia l'indice di riferimento. Equivale ad acquistare o vendere l'indice. Sono quotati sul mercato dei Covered warrants ma non sono un prodotto

			speculativo.
CERTIFICATE	Particolari warrants legati ad un paniere particolare di titoli scelto dall'emittente.	Medio-Alto	Analogo al benchmark, ma con la differenza che il paniere può essere variamente composto, a scelta dall'emittente, che si impegna comunque a pubblicarne ogni giorno il valore.
ETF	Quote di fondi specializzati su un particolare mercato o settore, che vengono gestiti in modo passivo, cercando di replicare il più fedelmente possibile l'andamento dell'indice che esprime quel mercato o settore.	Medio-Alto	Sostanzialmente simili al Benchmark, però, essendo fondi, investono direttamente sui titoli e distribuiscono gli eventuali dividendi. Il loro valore segue fedelmente l'indice di riferimento. Possono essere acquistati sull'MTF come se fossero azioni.

Mercato dei derivati (IDEM - MCW)

Riguarda *contratti derivati*, il cui valore è collegato al prezzo di uno strumento sottostante che può essere un'azione, un indice, una valuta, un tasso di interesse od una generica merce. Essendo contratti a termine hanno una scadenza. Generalmente sono molto volatili e dotati di effetto leva che moltiplica il profitto (o la perdita).

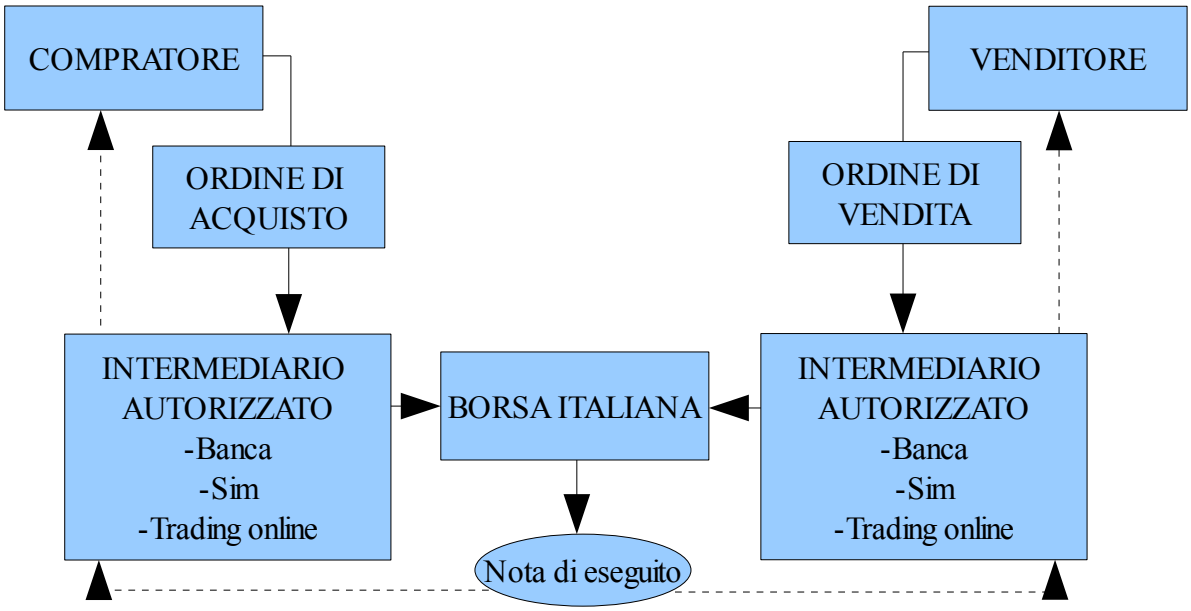
STRUMENTO	**PRINCIPALI CARATTERISTICHE**	**RISCHIO**	**NOTE**
OPZIONI PREMI WARRANT COVERED WARRANT	Contratti con i quali una delle parti, dietro il pagamento di un corrispettivo acquisisce la facoltà di acquistare (Call) oppure vendere (Put) una determinata attività, finanziaria o	Molto Alto	Prezzo=Valore intrinseco+Valore tempo. Il Valore intrinseco è la differenza tra quotazione del sottostante e lo strike price. E' zero se il prezzo del sottostante è inferiore allo strike price (out of the money). Il Valore tempo decresce col passare del tempo fino a zero (alla scadenza) e dipende dalla probabilità che il

	reale, ad un prezzo stabilito (strike price) e ad una certa data. Alla scadenza il compratore può esercitare l'opzione oppure abbandonarla.		sottostante superi lo strike price entro la scadenza. Dipende da: lontananza della quotazione del strike, volatilità del sottostante e durata residua. *Il valore dell'opzione può andare facilmente a zero* (ogni volta che l'opzione scade out of money). *Si può guadagnare molto ma è più facile perdere molto*.
FIB MINIFIB	Contratti di acquisto o Vendita a termine di un paniere di titoli (indice Mib 30) ad un prezzo e scadenza prefissati.	Molto Alto	Il contratto FIB vale 5 euro per ogni punto del MIB30, il MiniFib vale 1 euro per ogni punto del MIB30. Per il resto hanno le medesime caratteristiche. Si possono comprare e vendere allo scoperto versando solo il margine di garanzia (circa il 10-15%, varia a seconda degli intermediari). Ogni giorno vengono imputati guadagni o perdite e va integrato il margine. Hanno effetto leva, ma l'andamento segue quello del sottostante.
STOCK FUTURES	Contratti di acquisto o Vendita a termine di un singolo titolo azionario ad un prezzo e scadenza prefissati. Al momento sono negoziabili i principali titoli del MIB30.	Molto Alto	Il valore del contratto è dato da prezzo per lotto minimo del sottostante. Si possono comprare e vedere allo scoperto versando solo il margine di garanzia (circa il 10-15%, varia secondo i titoli sottostanti e secondo gli intermediari). Ogni giorno vengono imputati guadagni o perdite e va integrato il margine. Hanno effetto leva, ma l'andamento segue quello del sottostante.

2.3 Le regole

La regolamentazione dei mercati finanziari ha imposto precise direttive operative che vengono fissate dalla Borsa Italiana in stretto accordo con la Consob, alla quale spettano anche i compiti di controllo del regolare andamento dei mercati. Queste regole sono spesso modificate ed adattate alle mutate esigenze dei mercati. In sintesi:

- **Il percorso della negoziazione –** Lo schema seguente riporta il percorso dell'ordine di negoziazione. Le linee tratteggiate indicano il flusso di ritorno della conferma di eseguito (se avviene l'esecuzione).



- **Gli orari di negoziazione –**
  Pre-Asta: Fase in cui gli ordini impartiti vengono raccolti ma non inviati per l'esecuzione.
  Asta: Tutti gli ordini raccolti nella fase di pre-asta vengono confrontati ed incrociati per ottenere un unico prezzo di esecuzione in grado di soddisfare la maggiore quantità possibile di ordini di acquisto. Tale prezzo costituirà il prezzo di apertura a cui tutti questi ordini saranno eseguiti.
  Negoziazione continua: Ciascun ordine entra immediatamente in negoziazione ed è inserito nel Book, cioè l'elenco ordinato delle proposte di acquisto e vendita. Può trovare immediata esecuzione (totale o parziale) se la proposta di acquisto (o vendita) è compatibile per prezzo e quantità con una proposta di vendita (o acquisto) già presente sul book. Altrimenti la proposta è esposta in negoziazione in attesa di esecuzione.

  Nella tabella segeunte sono riportati i vari orari.

	Pre-Asta di apertura	Asta di apertura	Negoziazione continua	Pre-Asta di chiusura	Asta di chiusura	Neg. Cont.
OBBLIGAZIONI						
Titoli di stato	8:00-9:45	9:45	10:00-17:30			
Obbligaz. Euro	8:00-10:15	10:15	10:00-17:30			
Obbligaz. altre valute	8:00-15:30	15:30	15:45-17:30			
Eurobbligazioni (Euromot)			9:00-17:30			
Obbl. Convertibili	Stesso orario azione sottostante					
AZIONI						
Blue Chip, Star, Nuovo Mercato	8:00-9:00	9:00-9:10	9:10-17:25	17:25-17:35	17:35-17:40	18:00-20:30
Classe 1	8:00-10:50	10:50-11:00	11:00-16:25	16:25-16:35	16:35-16:40	
Classe 2, ristretto	8:00-10:50	10:50-11:00		11:00-16:35	16:35-16:40	
FONDI						
Classe 1 (ETF, Fondi, Sicav indicizzati)			9:10-17:25			
Classe 2 (Fondi chiusi)	8:00-10:50	10:50-11:00		11:00-16:35	16:35-16:40	
DERIVATI						
Opzioni, Premi, Fib, Mini Fib, Stock Futures			9:00-17:40			
Covered Warrant			9:10-17:25		Solo alcuni ->	18:00-20:30

2.4 Il Book

Il Book di negoziazione è l'elenco ufficiale ordinato di tutte le proposte di negoziazione presenti in un dato momento sul computer della Borsa Italiana. Ciascun titolo ha la sezione "Proposte di acquisto" (si dice anche **"Denaro"**, in inglese "Bid") e la sezione proposte di vendita" (si dice anche **"Lettera"** in inglese "ask" od "offer"). Le proposte sono ordinate per prezzo: decrescente quelle di acquisto, crescente quelle di vendita. Nell'ambito di ciascun livello di prezzo sono ordinate in senso cronologico in base al momento di immissione: il primo arrivato sta in cima. L'esempio seguente presenta il book del titolo ENEL alle ore 14:29:36 del giorno 8/11/2000.

esempio

ENEL Valore...:4,3000 -0,05% 14:29:36-08/11/2000
Apertura: 4,3200 Minimo: 4,3000 Contratti: 5.197
Precedente: 4,3020 Massimo:4,3200 Controval.: 40.907.635,00

Acquisto			Vendita		
Numero proposte	Somma quantità	Prezzo	Prezzo	Somma quantità	Numero proposte
129	1'890'500	4,3	4,31	310'500	19
77	1'504'000	4,29	4,32	1'236'500	353
116	1'107'500	4,28	4,33	811'500	217
65	584'500	4,27	4,34	1'193'500	156
72	324'500	4,26	4,35	1'137'500	474

Il book contiene tutte le proposte di negoziazione impartite con prezzo limitato. Riflette perciò fedelmente i flussi di acquisto e di vendita che si avrebbero a determinati livelli di prezzo, ed è quindi un termometro degli umori del mercato. La sua attenta lettura può aiutare a prevedere l'andamento di brevissimo termine del mercato e dare informazioni preziose per le decisioni di acquisto e di vendita. Esistono addirittura tecniche operative di brevissimo periodo (**scalping**) basate esclusivamente sull'interpretazione del book.
Confrontando i migliori prezzi in acquisto ed in vendita si può misurare lo **spread**, cioè la differenza tra denaro e lettera. Sui titoli molto trattati normalmente è molto contenuto. Più è elevato, più operare su quel titolo con ordini al meglio può diventare penalizzante. Inoltre uno spread elevato indica che il titolo è poco trattato, per cui può essere difficile ottenere l'esecuzione di ordini a prezzo limitato. Infine i titoli con spread elevato sono soggetti ad erraticità nella quotazione, dovuta all'eventuale esecuzione alternata di proposte in denaro ed in lettera.
Nell'esempio si vede che lo spread è uguale alla differenza minima di prezzo (il **tick**) ammessa dal Regolamento di Borsa su quel titolo.

Si noti invece l'esempio seguente relativo ad un titolo decisamente più illiquido. In questo caso oltre a non rilevare contratti eseguiti, il book esprime uno spread del 7,7%, piuttosto elevato.

Esempio

LINIFICIO Valore:0,0000 ...% 10:50:00-.../.../...
Apertura: 4,3200 Minimo: ... Contratti...: ...
Precedente: 1,1140 Massimo: ... Controval.: …
Denaro: 0,9750 Lettera:1,0500 Quantità: 1,000 Quantità: 3.479

Numero proposte	Somma Quantità	Prezzo	Prezzo	Somma quantità	Numero proposte
1	1'000	0,975	1,050	3'479	1
1	1'000	0,974	1,150	100	1
1	1'000	0,970	1,170	207	1
2	5'100	0,950	1,184	2'522	1
1	100	0,850	1,185	2'500	1

Sono previste ed ammesse dalla borsa Italiana varie modalità di ordini. Sul mercato azionario è stato abolito il lotto minimo per cui non ci sono più limiti alle quantità trattate. Le tipologie di ordine più utilizzate sono:

- **ordine con prezzo limite –** Esempi: Compro 100 FIAT limite 12,15 euro. Vendo 100 ENI limite 15,05 euro. Sono interpretati come intenzione di comprare (o vendere) al prezzo più favorevole possibile, comunque non maggiore (o minore) di quello indicato come limite.
  Viene inserito come proposta di negoziazione al livello di prezzo indicato come limite.
  Esiti possibili:

1. Acquisto: se il primo prezzo lettera presente sul book è minore o uguale al prezzo limite si esegue al prezzo lettera, altrimenti si espone l'ordine in denaro al prezzo limite.
2. Vendita: se il primo prezzo denaro presente sul book è maggiore o uguale al prezzo limite esegue al prezzo denaro, altrimenti espone l'ordine in lettera al prezzo limite.

Quando si impartiscono ordini con prezzo limitato esistono particolari limitazioni ai valori che si possono inserire. Innanzitutto i valori inseriti devono seguire una particolare progressione. L'intervallo minimo tra un livello di prezzo e quello superiore che si può inserire si chiama tick e varia a seconda del prezzo di riferimento del titolo come precisato nella seguente tabella:

AZIONI		COVERED WARRANT	
Prezzo di riferimento (Euro)	Valore del tick (euro)	Prezzo di riferimento (Euro)	Valore del tick (Euro)
<= 0,0030	0,0001	<= 0,0030	0,0001
Da 0,0032 a 0,3000	0,0005	Da 0,0031 a 0,3000	0,0005
Da 0,3001 a 1,500	0,0010	Da 0,0031 a 1,500	0,0010
Da 1,501 a 3,000	0,0050	Da 1,501 a 3,000	0,0050
Superiore a 3	0,0100	Da 3,0001 a 30,0000	0,0100
		Superiore a 30	0,0500

Esistono inoltre altre limitazioni all'inserimento ordini. Relativamente al segmento azioni:
- le proposte non possono discostarsi di oltre il 90% dal prezzo dell'ultima asta;
- il valore del contratto eseguito non può superare uno scostamento del 10% dal prezzo dell'ultima asta, in tal caso scatta la sospensione del titolo per almeno trenta minuti per eccesso di rialzo o ribasso;
- il valore del contratto eseguito non può superare uno scostamento del 5% dal prezzo dell'ultimo contratto precedente, in tal caso scatta la sospensione del titolo per almeno trenta minuti per eccesso di rialzo (o ribasso).

- **ordine al prezzo di mercato (al meglio) –** Esempi: Compro 500 TIM al meglio. Vendo 100 FIAT al meglio.
  Viene interpretato come intenzione di comprare (o vendere) al più favorevole prezzo esistente sul book nel preciso istante in cui l'ordine viene immesso.
  Esiti possibili:

1. Acquisto:esegue al primo prezzo lettera presente sul book.
2. Vendita: esegue al primo prezzo denaro.

- **ordini stop (esponi al raggiungimento del prezzo) –** Sospende l'ordine fino al raggiungimento di un certo prezzo prefissato dall'ordinante. Al momento in cui il prezzo prefissato viene raggiunto l'ordine viene inviato al mercato. Utile per applicare lo stop loss oppure per acquistare solo quando viene rotta una resistenza importante senza rischiare di perdere l'occasione.
  Questo tipo di ordine normalmente non è gestito dagli intermediari tradizionali, ma è consentito da parecchie SIM on line.

2.5 Una analisi time series dei rendimenti

Lo studio di una serie storica ,realizzazione di un processo stocastico, ovvero di T osservazioni nel tempo di una variabile y_t , riguarda il comportamento di tale serie (Mazzuco 2006): in particolare se **stazionaria** o meno, se più o meno "rumorosa" o **"volatile"**, se le sue componenti sono o meno **correlate** nel tempo. La stazionarietà di un processo prevede le seguenti caratteristiche

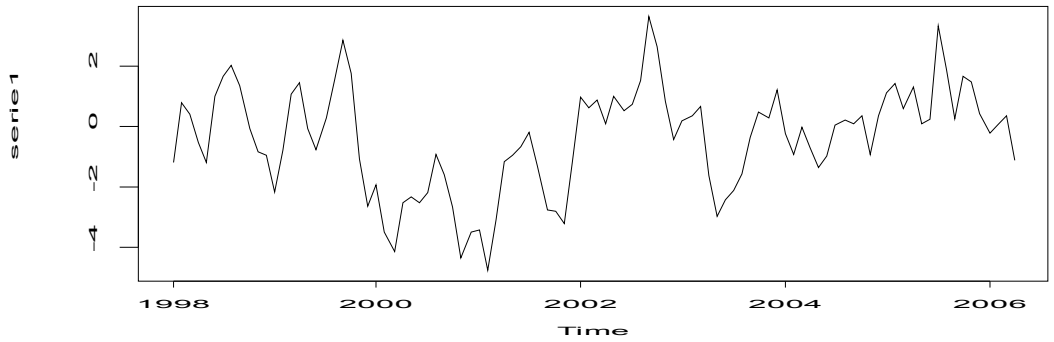
- **media** uguale per ogni valore di t: $E(t)=\mu \quad \forall$ t;
- **varianza** uguale per ogni valore di t: $Var(y_t) = \sigma^2 \quad \forall$ t;
- **covarianza** tra y_t ed y_{t+h} dipendente unicamente dalla distanza tra t e t+h: $Cov(y_t, y_{t+h}) = \gamma(h) \quad \forall$ t,h.

La conseguenza degli ultimi due punti è che la funzione di autocorrelazione dipende unicamente dalla distanza tra y_t e y_{t+h} , cioè $corr(t_t, y_{t+h}) = \rho(h) \quad \forall$ t,h.

Per lavorare con le serie esiste in R una biblioteca chiamata "**ts**" (**time series**). All'interno di questa biblioteca troviamo un oggetto specifico, **ts**, che identifica una serie storica.
Proviamo ad esplorare le potenzialità di R prima con una serie simulata e poi con una applicazione sui rendimenti di titoli reali; partendo dall'analisi di processi stazionari e non stazionari, prendendo in considerazione le categorie **AR**, **MA** e **GARCH**, dovremmo riuscire a costruire un criterio minimo d'analisi utile per orientarsi nelle scelte allocative di portafoglio.

```
> x <- arima.sim(list(oreder = c(1, 0, 1), ar = 0.7, ma = 0.4), n=100)
> serie1 <- ts(x, start = 1998, frequency = 12)
> plot(serie1)
```

simulazione serie1 mensile 1998 - 2006



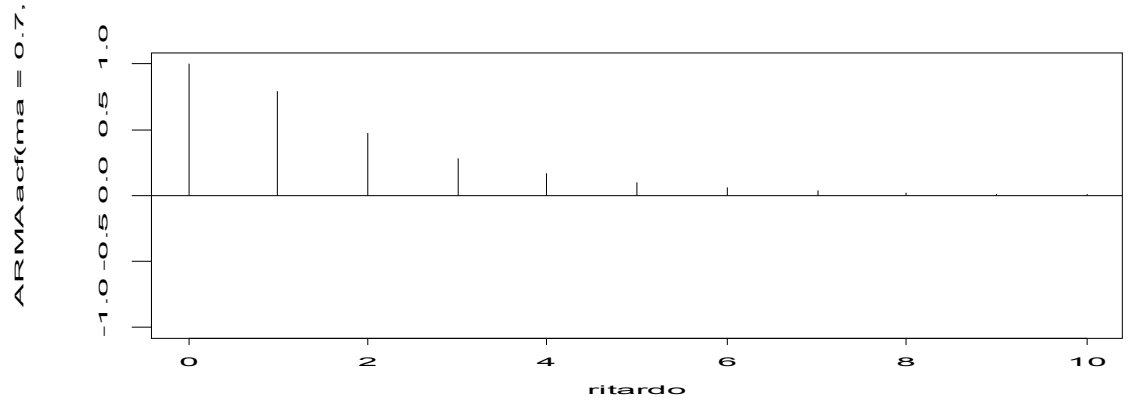
Lo strumento principale che si utilizza per affrontare l'analisi di una serie storica è il grafico della **funzione di autocorrelazione** o **correlogramma**. Ogni processo di tipo **ARMA(p,q)** ha una funzione di autocorrelazione ben definita, ed il primo passo per identificare la serie è quello di scegliere i valori di p e q che meglio si adattano alla serie osservata proprio attraverso la lettura del correlogramma e del **correlogramma parziale** secondo la metodologia Box-Jenkins (1976).
L'identificazione non sempre è facile. I processi semplici **MA(q)** o **AR(p)** hanno caratteristiche abbastanza ben definite, ma il correlogramma di un ARMA(p,q) è già meno facile da riconoscere. E' necessario "farsi l'occhio".
In R il comando "**ARMAacf**" permette di visualizzare il correlogramma ed il correlogramma parziale di serie costruite da noi. Se per esempio volessimo rappresentare il grafico di autocorrelazione ed autocorrelazione parziale della serie

$$y_t = 0.6y_{t-1} + u_t + 0.7u_{t-1}$$

basta dare il comando

```
> plot(0:10, ARMAacf(ma = 0.7, ar = 0.6, lag.max = 10), type = "h", ylim = c(-1, 1), xlab = "ritardo")
```

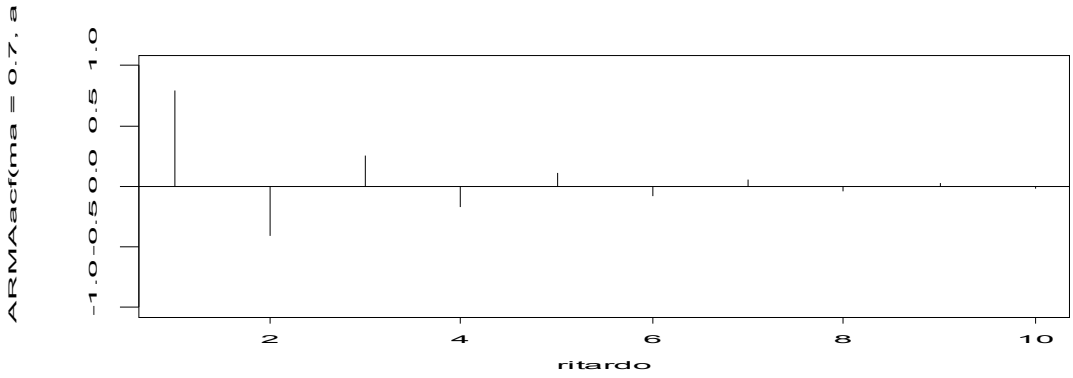
```
> abline(h = 0)
```



Abbiamo detto ad R di creare un grafico con i valori delle ascisse che vanno da 0 a 10 (**0:10**) e i valori delle ordinate stabilite dal comando ARMAacf. Con **type="h"** specifichiamo che vogliamo delle barre verticali, come vien fatto solitamente con i correlogrammi. **ylim=c(-1,1)** è l'opzione che serve per dire a R di disegnare l'asse delle ordinate da -1 ad 1, cioè il limite minimo e massimo della funzione di autocorrelazione. In fine etichettiamo l'asse delle ascisse con **xlab**.

Se invece del correlogramma volessimo disegnare il grafico di autocorrelazione parziale (che miisura la correlazione tra X t e X t+k al netto della dipendenza lineare con le variabili casuali intermedie), basta specificare all'interno del comando ARMAacf, l'opzione **pacf=TRUE**

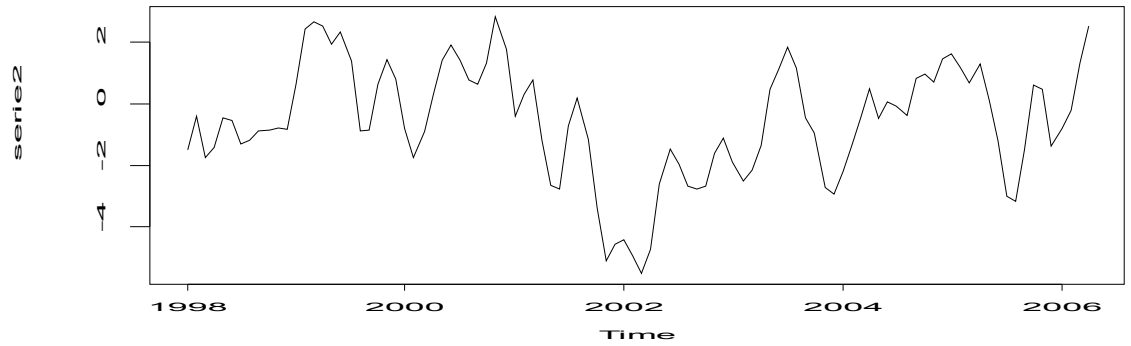
```
> plot(ARMAacf( ma = 0.7, ar = 0.6, lag.max = 10, pacf = TRUE),
type = "h", ylim = c(-1, 1), xlab = "ritardo")
>  abline(h = 0)
```



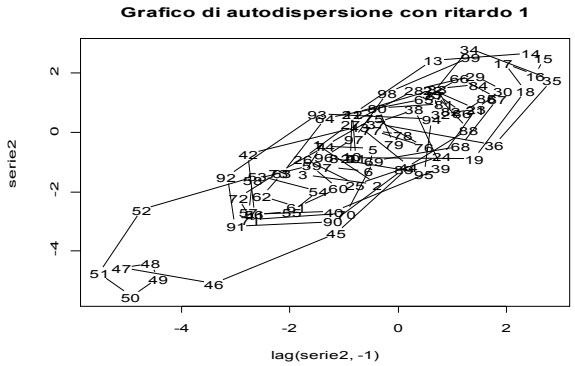
Analizziamo la seguente serie storica originata da un processo con componenti AR(1) MA(1) integrato

```
> y <- arima.sim(n = 100, list(order = c(1, 0, 1), ar = 0.6, ma =
0.7))
> serie2 <- ts(y, start = 1998, frequency = 12)
```

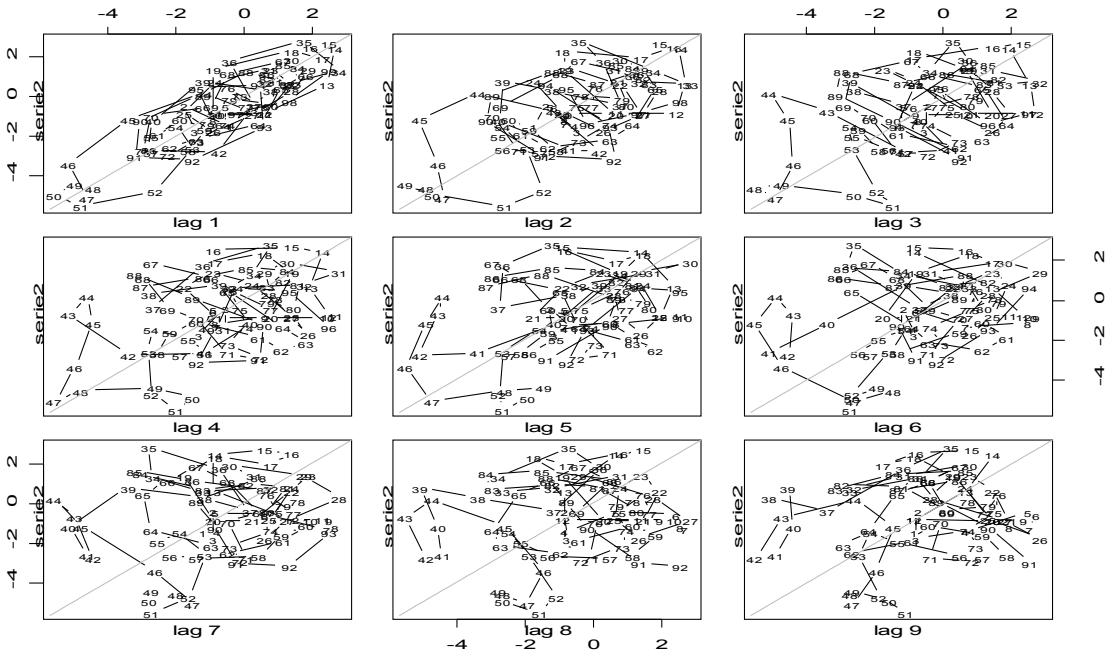
```
> plot(y)
```




```
> plot(lag(serie2, -1), serie2, main = "Grafico di autodispersione
con ritardo 1")
```

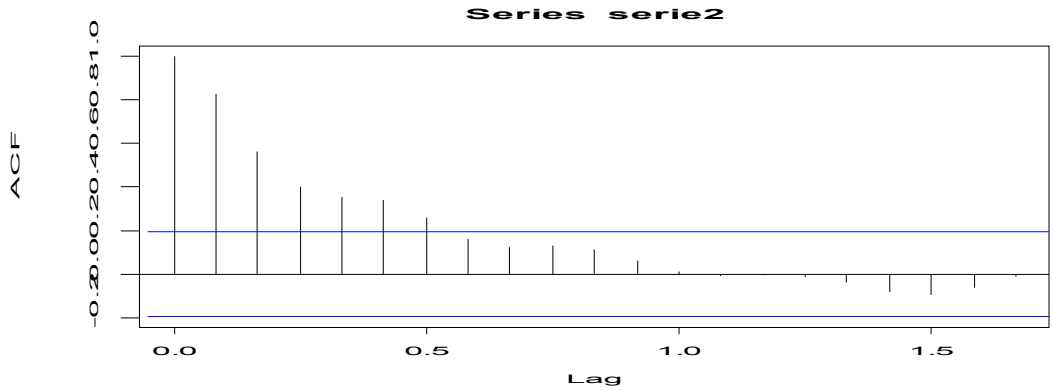



```
> lag.plot(serie2, 9)
```

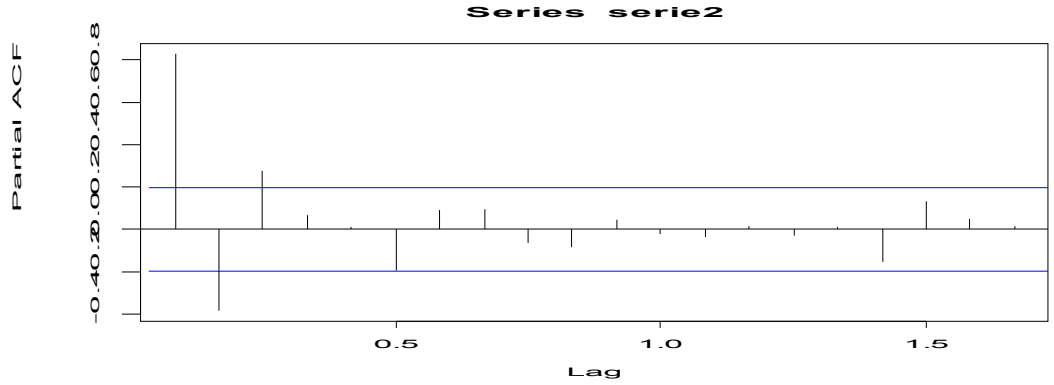


I due grafici riportati mostrano l'**autodispersione** dei residui: forte correlazione per ritardi di un periodo, più debole o nulla per ritardi successivi. Se non conoscessimo la serie saremmo comunque indotti a sospettare una qualche forma di ritardo delle componenti. La funzione **lag** mostra i ritardi.

```
> acf(serie2)
```




```
> pacf(serie2)
```



Tenendo presente che R disegna la funzione di autocorrelazione anche per il periodo 0 che è 1, notiamo dalla pacf tre ritardi rilevanti per un modello AR.
Proviamo a stimare allora un AR(3) utilizzando la funzione **arima()**

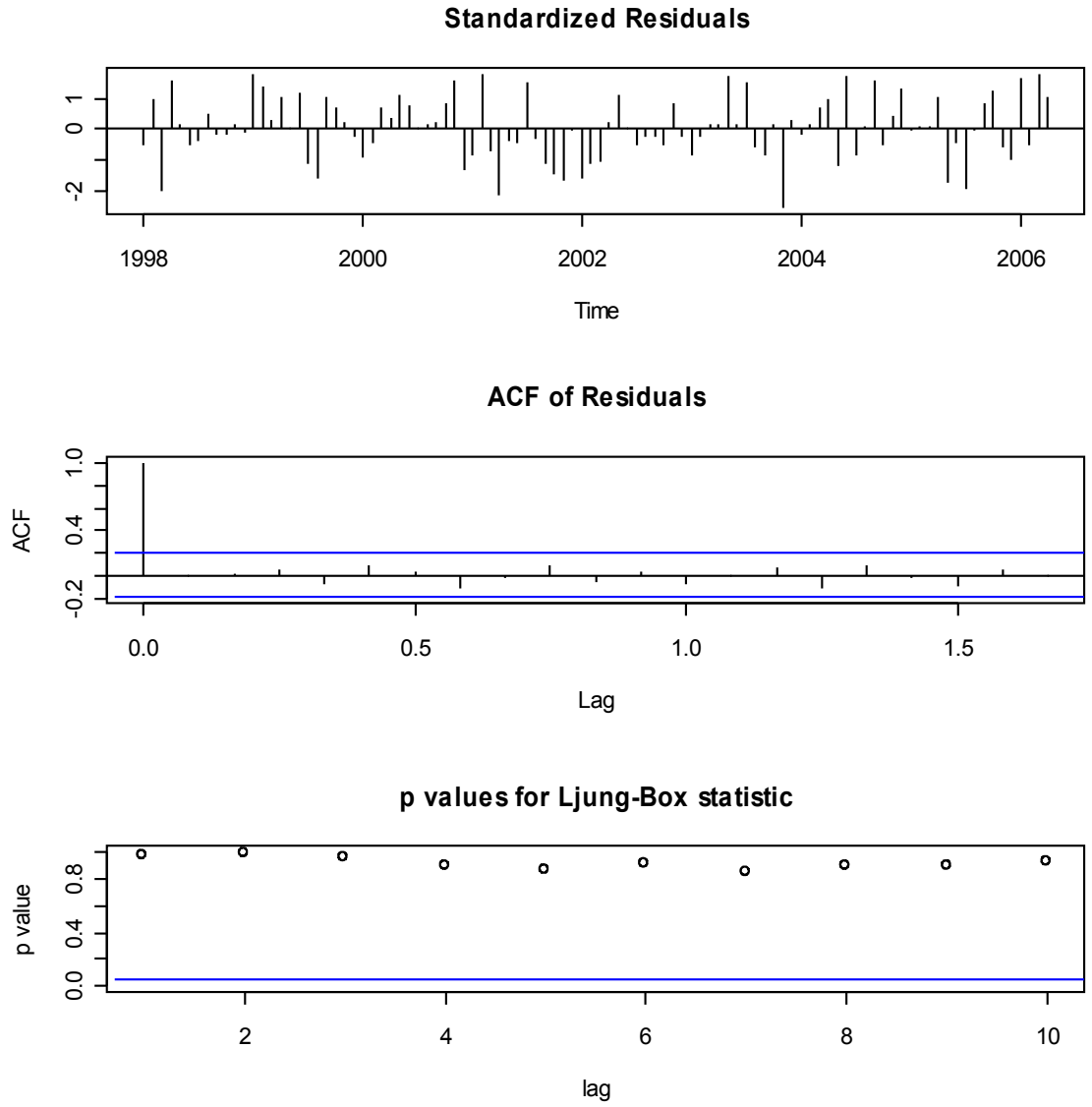
```
> ar3 <- arima(serie2, c(3, 0, 0))
> ar3

Call:
arima(x = serie2, order = c(3, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2     ar3  intercept
      1.3964  -0.9157  0.3786     -0.542
s.e.  0.0942   0.1442  0.0951      0.568

sigma^2 estimated as 0.7013: log-likelihood= -125.24, aic= 260.48
```

In questo modo si stimano i parametri δ, θ_1, θ_2 e θ_3 del modello

$$y_t = \delta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \theta_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

Per controllare se la rappresentazione è buona facciamo un po di diagnostica con la funzione **"tsdiag()"**

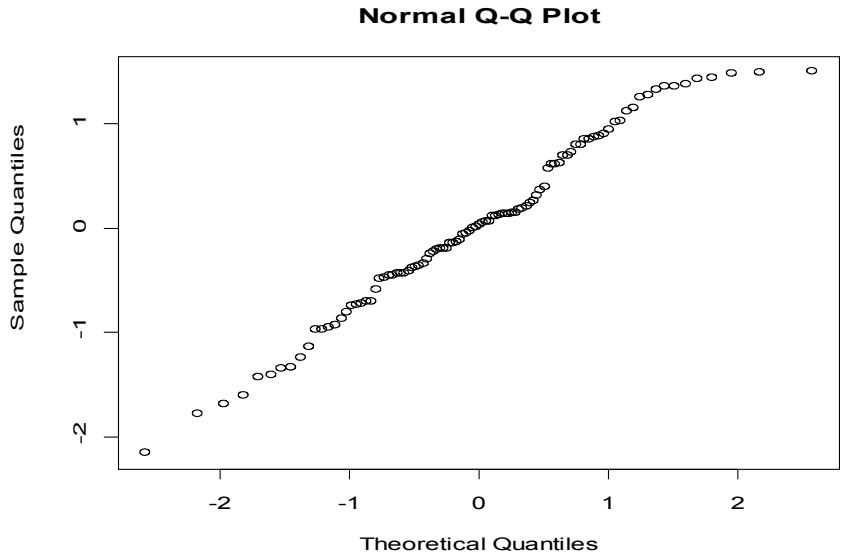
```
> tsdiag(ar3)
```



Questo comando fornisce alcuni grafici sui residui: il primo riporta semplicemente la serie, il secondo la funzione di autocorrelazione dei residui, il terzo riporta i p-values della statistica test **Box-Ljung**. Se il nostro modello è corretto i residui dovrebbero comportarsi come un White Noise. In effetti i valori oscillano intorno allo zero con tendenza abbastanza uniforme, i residui non sono correlati ed i p-values del Box-Ljung test sono costantemente sopra il 5%.

Abbiamo stimato un arima (1,0,1) con un AR(3). Ciò è assolutamente possibile: i valori dei parametri infatti incamerano il comportamento del modello.
Un'altra conferma sulla distribuzone dei residui si può avere facendo un **normality plot**: con questo grafico si confrontano i quantili[11] di una distribuzione normale con la distribuzione dei residui. Se i punti osservati si dispongono sulla bisettrice degli assi, allora la distribuzione dei residui è normale, se invece deviano allora la distribuzione si discosta dalla normalità. Come si vede dal grafico i residui sono distribuiti non normalmente: la curva in alto a destra ci evidenzia una qualche forma di discostamento.

> qqnorm(ar3$residuals)



Se i grafici acf e pacf fossero stati inversi per quanto concerne i ritardi, avremmo potuto impostare la stima di un modello MA

$$y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

secondo la stessa sequenza, senza troppa difficoltà. Potevamo anche ristimare il modello con un arma(1,1) con il comando **arima(serie2, c(1, 0, 1))** ovviamente ottenendo un'ottima stima, anzi, perfetta, incrementando l'effetto WN sulla distribuzione dei residui.

La classe dei modelli ARMA può essere ricondotta come abbiamo detto alla classe dei **processi stazionari**. Le serie storiche difficilmente lo sono, così che la classe ARMA di per se stessa risulta insufficiente per analizzarle. Dobbiamo allora estendere i modelli per poter cogliere le componenti di **non stazionarietà** presenti nelle serie. La presenza di un **trend** è un classico motivo

11 I quantili di una distribuzione sono i valori inversi della funzione di riparitzione F: $q_x = F^{-1}(x)$.

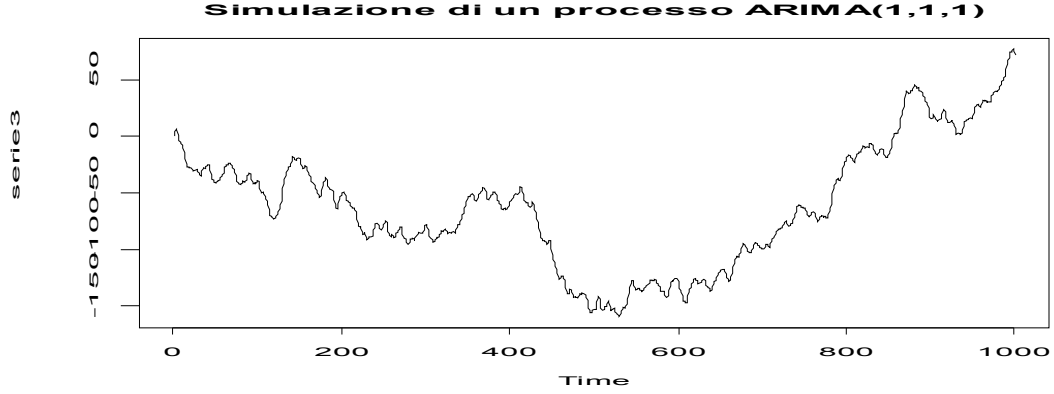
per cui una serie non è stazionaria, ovvero la media della serie non è costante nel tempo.

$$E(y_t)=\mu_t$$

Come è noto, ci sono due possibili vie per stimare un modello correttamente in presenza di trend nella serie:

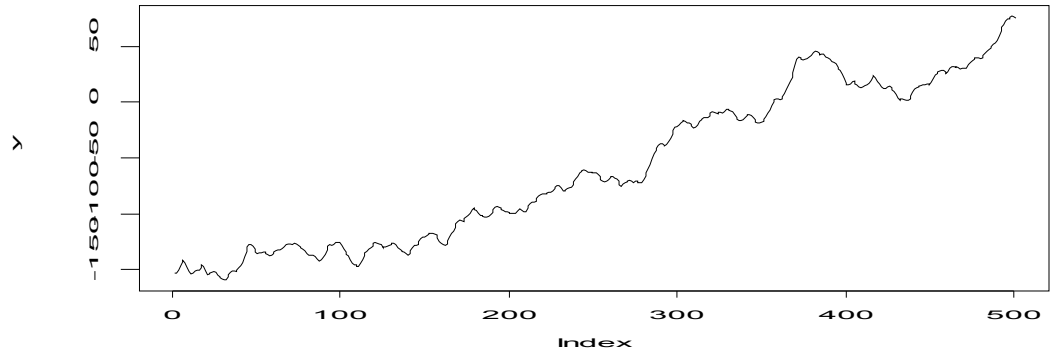
- si stima il trend con un **modello parametrico** del tipo $y_t=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\ldots+\beta_p t^p+\varepsilon_t$ e poi si stima un modello ARMA(p,q) sui residui ε_t ;
- si **differenzia** la serie in modo da rimuovere la componente di trend; si stima, cioè un modello ARIMA(p,d,q) dove d è il numero di volte che la serie viene differenziata.

```
> serie3 <- arima.sim(n=100, list(order=c(1,1,1), ar=0.6, ma=0.7))
> plot(serie3, main="Simulazione di un processo ARIMA(1,1,1)")
```



Prendiamo ad esempio il periodo 500:1000 di questa simulazione in cui catturiamo visivamente l'evidenza di un trend ascendente

```
> y <- cbind(serie3[500:1000])
> plot(y, type = "l")
```



Proviamo allora a stimare questo trend per poi adattare un modello ai residui. Cominciamo con un **trend lineare semplice** e vediamo se si adatta con **lm;** poi facciamo un grafico dei residui per

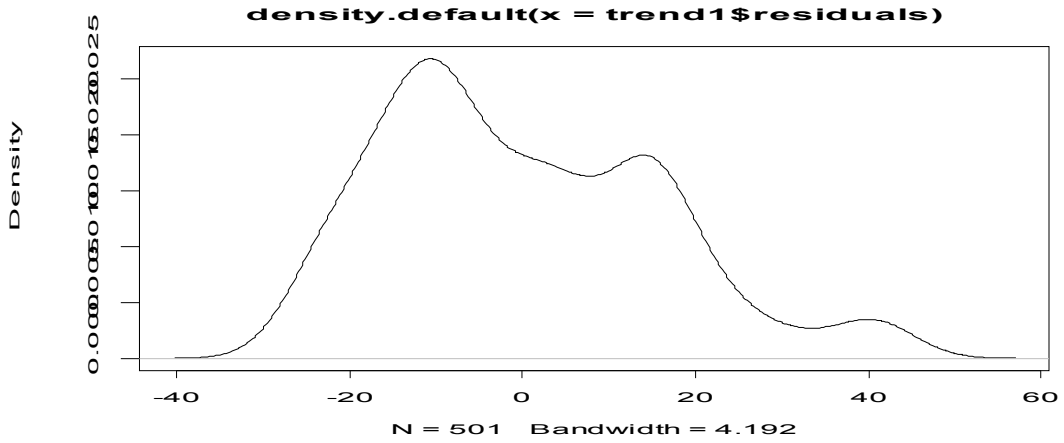
controllare se siamo riusciti a rimuoverlo completamente oppure no.

```
> trend1 <- lm(y ~ c(1:length(y)))
> summary(trend1)

Call:
lm(formula = y ~ c(1:length(y)))

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-27.807 -12.553  -2.850  12.474  44.482

Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    -1.755e+02  1.446e+00 -121.32   <2e-16 ***
c(1:length(y))  4.633e-01  4.993e-03   92.78   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 16.16 on 499 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9452,     Adjusted R-squared: 0.9451
F-statistic:  8608 on 1 and 499 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Con **c(1:lenght(y))** creiamo la covariata t, cioè il tempo delle osservazioni. Questo comando corrisponde a stimare il modello lineare

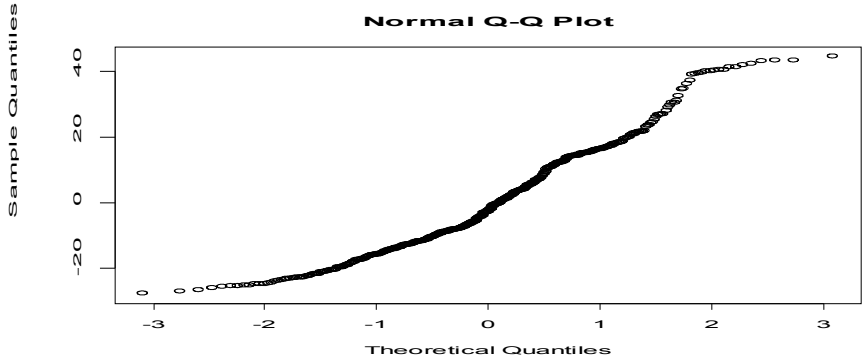
$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon$$

La regressione sembra apparentemente “fittare” bene i dati con un R^2 di 0.94 molto vicino ad 1, e quindi non sembra esserci la necessità di introdurre un termine quadratico. Effettuiamo un grafico della densità dei residui



Analizziamo i residui e vediamo se incorre una qualche struttura di dipendenza temporale.

```
> qqnorm(trend1$residuals)
```

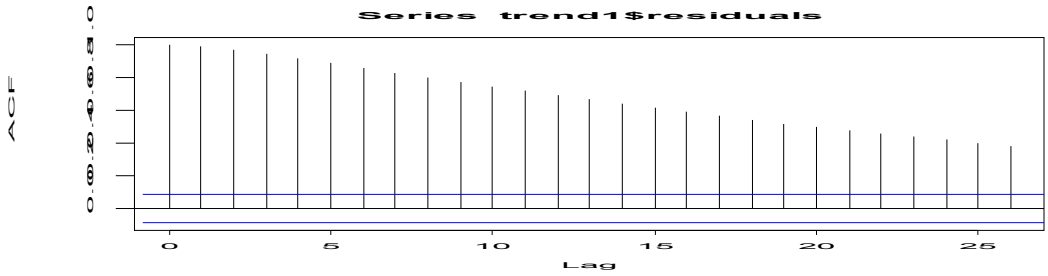


Come possiamo osservare dal confronto sulla distribuzione dei quantili nel normal plot per trend1 la distribuzione oscilla significativamente intorno alla bisettrice, sintomo di una distribuzione non normale.

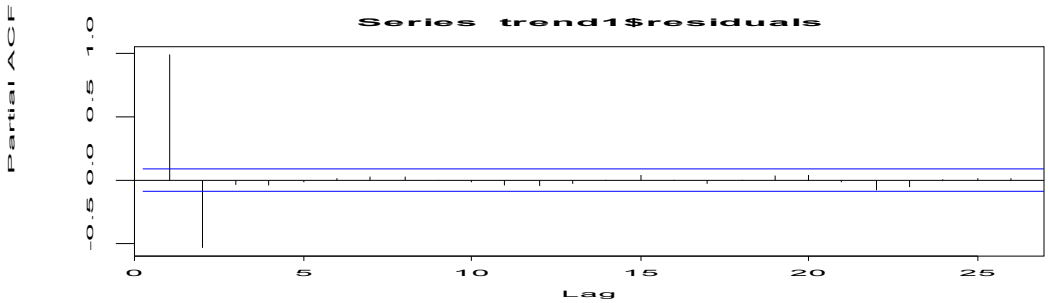
```
> dwtest(trend1)

        Durbin-Watson test

data:  trend1
DW = 0.0123, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

La presenza di una qualche forma di autocorrelazione è evidente dal p-value, molto basso. Disegniamo dunque le funzioni di autocorrelazione ed autocorrelazione parziale con i soliti comandi

```
> acf(trend1$residuals)
```

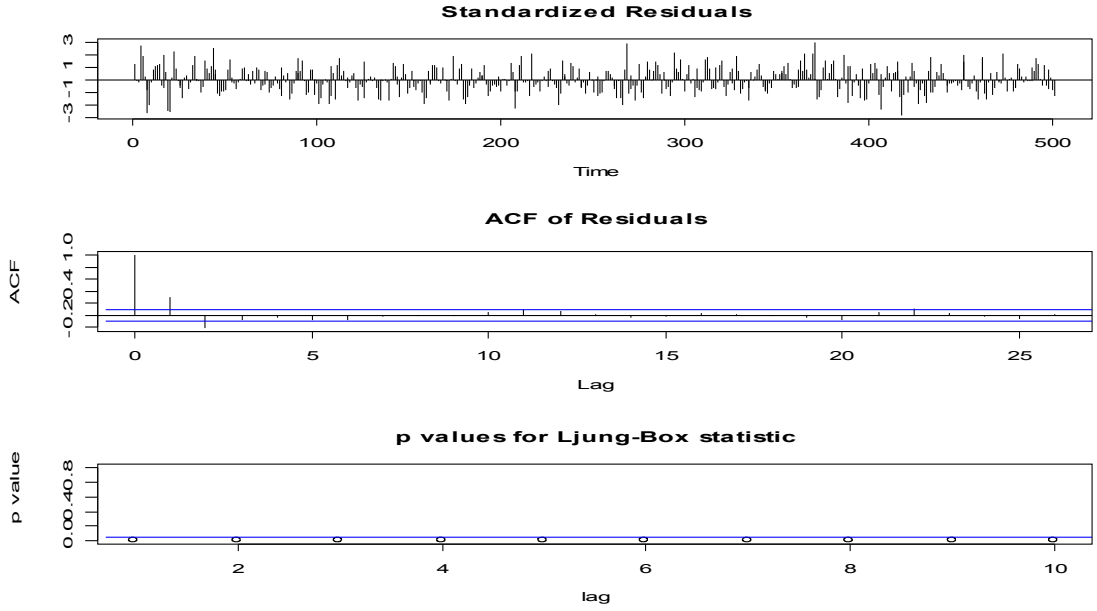



```
> pacf(trend1$residuals)
```



Sembrerebbe che la pacf ci suggerisca di provare con un modello AR(2). Proviamo

```
> ar2 <- arima(trend1$residuals, order = c(2,0,0))
> ar2

Call:
arima(x = trend1$residuals, order = c(2, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      1.7729  -0.7839     1.1211
s.e.  0.0276   0.0277     4.3777

sigma^2 estimated as 1.234:  log likelihood = -766.79,  aic = 1541.59

tsdiag(ar2)
```

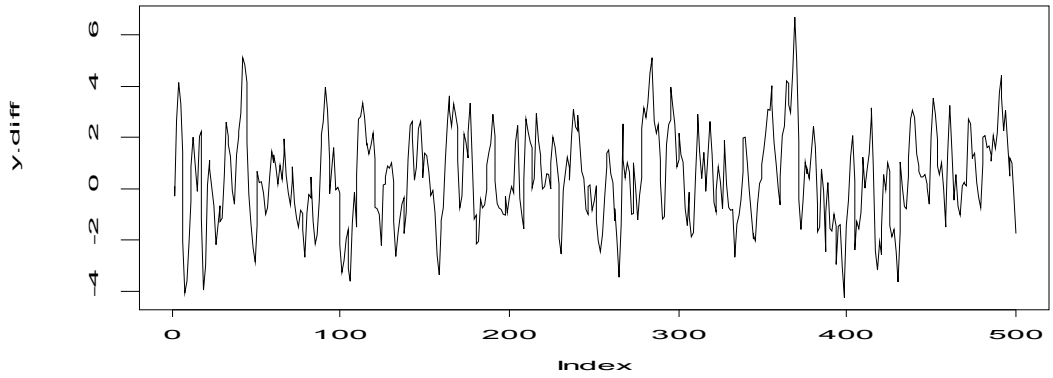


I p-valori del Ljung-Box test sono tutti sotto i valori di soglia ed il grafico dei residui presenta una distribuzione strana, a doppia punta (pg. 54). Sembra che il modello deterministico non rappresenti bene la situazione. Proviamo con il **trend stocastico**, dove cioè abbiamo oscillazioni casuali attorno al trend. Il tipico caso di trend stocastico è il **random walk con drift**. Si tratta di una serie che si comporta secondo il modello

$$y_t = \beta + y_{t-1} + \varepsilon$$

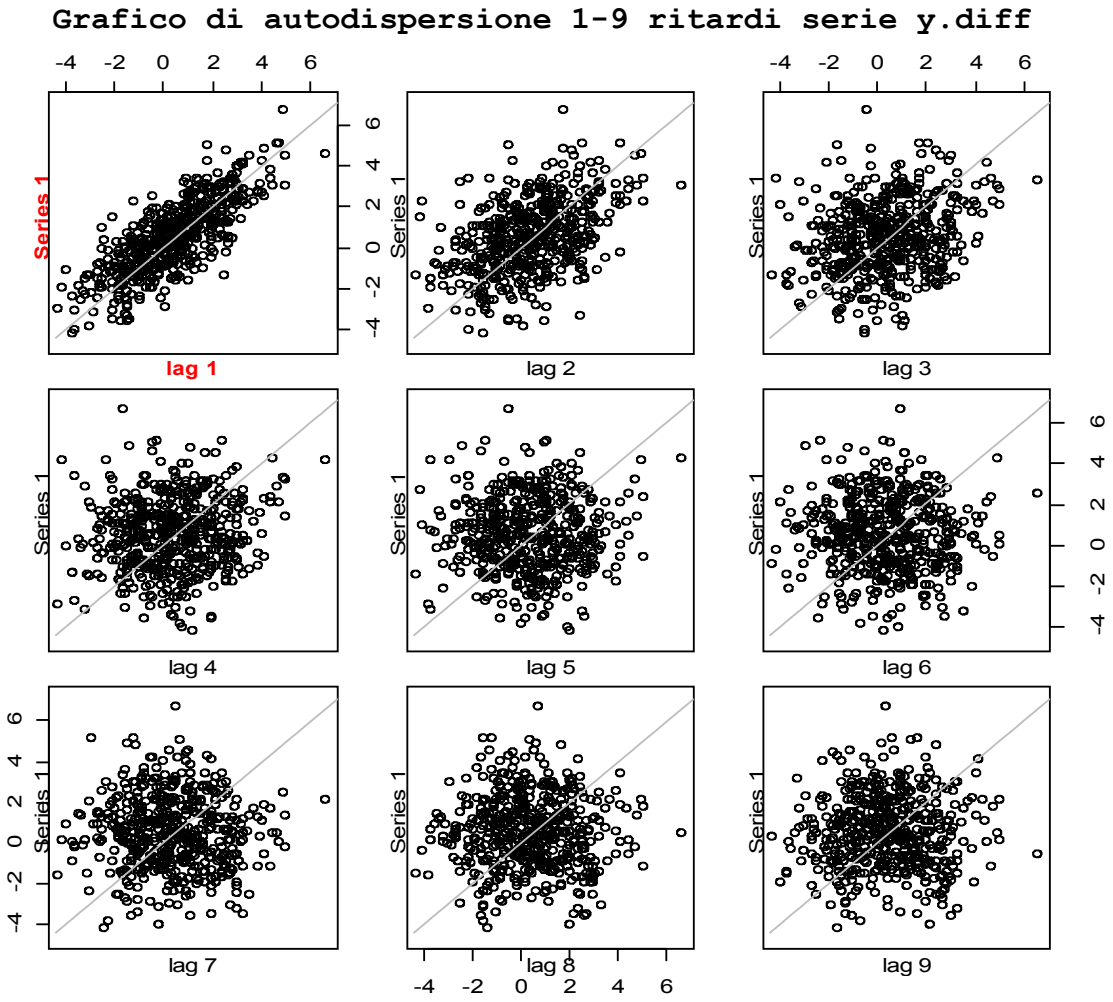
Proviamo a differenziare la serie con la funzione **diff()** nella quale è possibile specificare anche il lag della differenziazione e l'ordine. In questo caso con un lag=1

```
> y.diff <- diff(y)
> plot(y.diff, type = "l")
```

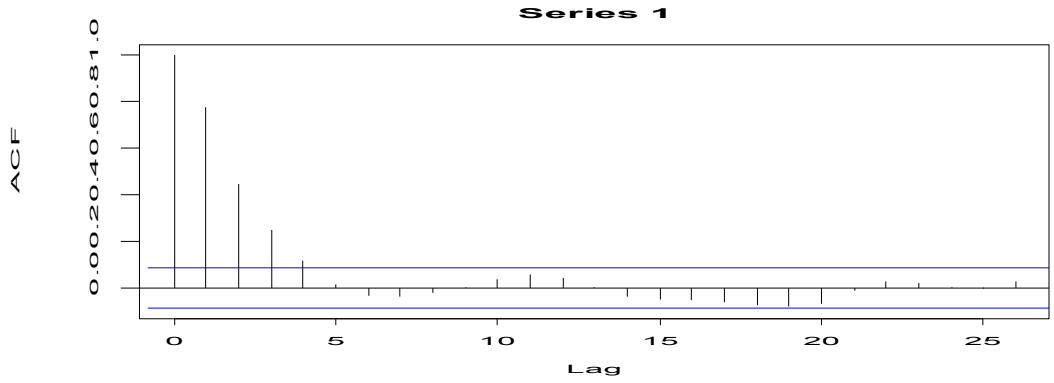


Il grafico mostra la serie differenziata che sembra avere le caratteristiche di una serie stazionaria. Sempre fingendoci all'oscuro di fonti di informazione circa l'origine della serie proviamo a trovare il modello adatto

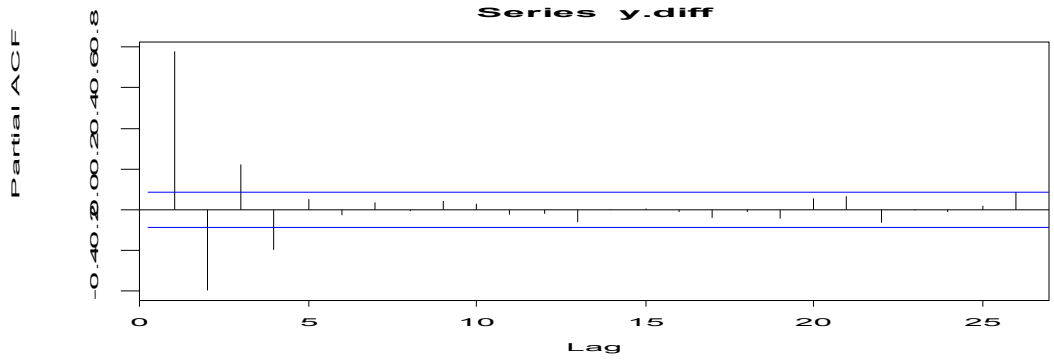
```
>  lag.plot(y.diff, 9)
```



```
> acf(y.diff)
```



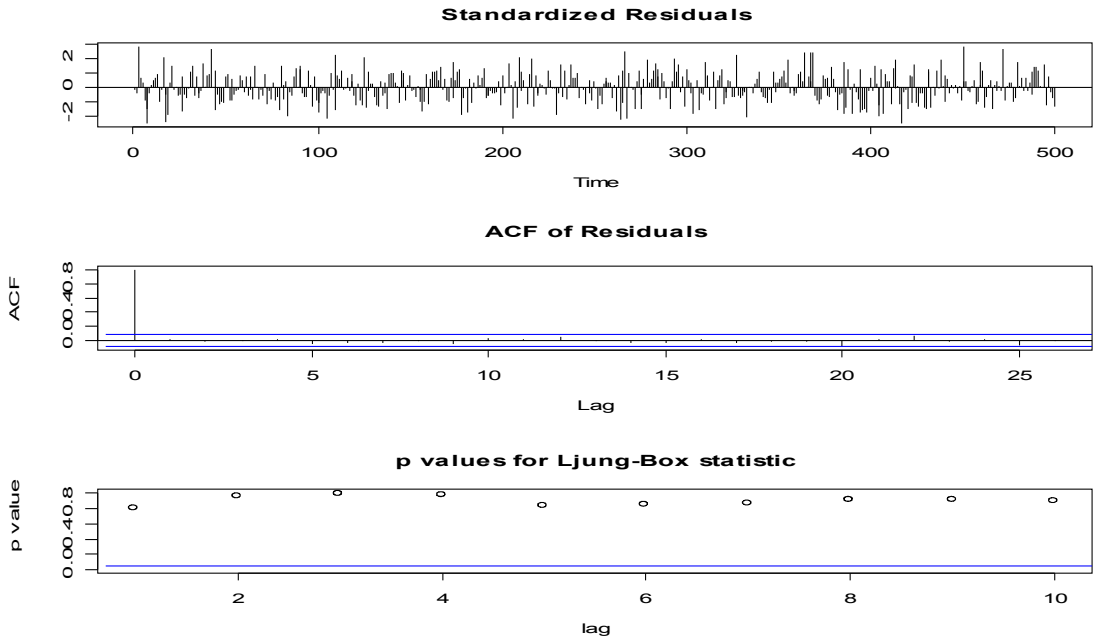

```
> pacf(y.diff)
```



Sia la funzione acf che la funzione pacf individuano una autocorrelazione al quarto ritardo. Sarebbe quindi insufficiente ipotizzare un modello AR(4) o MA(4), dobbiamo andare per tentativi su un modello ARMA. Dal grafico di autodispersione notiamo la rilevanza visiva di correlazione per il primo ritardo, proviamo dunque con un ARMA(1,1) (che sappiamo essere l'origine della nostra serie differenziata, ma facciamo finta di non esserne a conoscenza) ed effettuiamo l'analisi

```
>arma11 <- arima(y.diff, c(1, 0, 1))
> arma11

Call:
arima(x = y.diff, order = c(1, 0, 1))

Coefficients:
         ar1     ma1  intercept
      0.5856  0.6504     0.4482
s.e.  0.0399  0.0354     0.1742

sigma^2 estimated as 0.9637:  log likelihood = -701.03,  aic =
1410.06
```

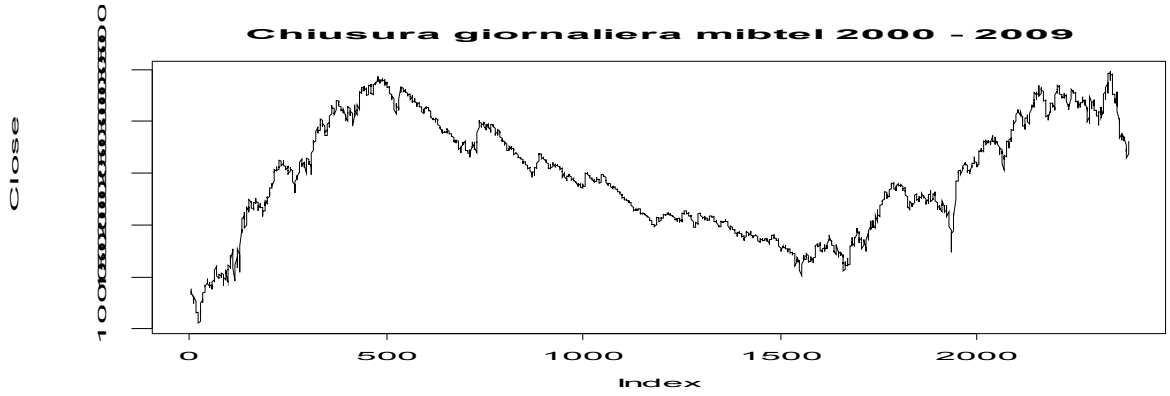
```
> tsdiag(arma11)
```



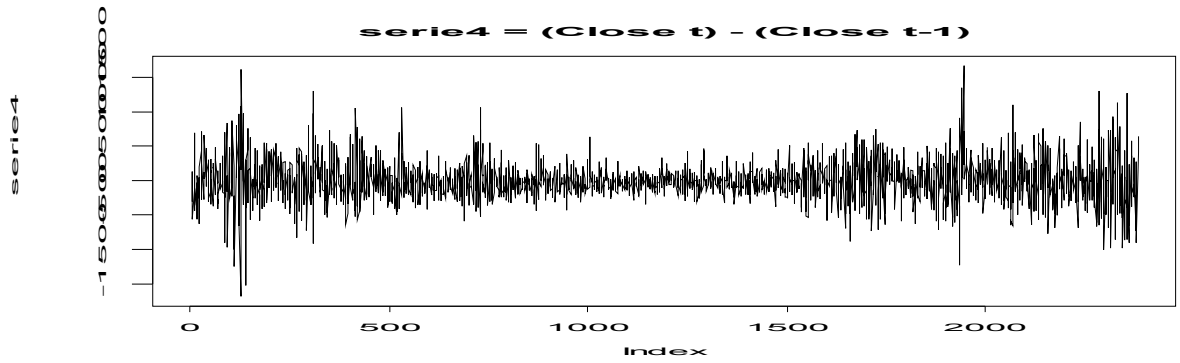
Il nostro modello sembra perfettamente adattato.
Per quanto concerne l'**adattamento del modello** è bene riferirsi al test **AIC** - più basso è il valore del parametro, migliore è l'adattamento del modello – ed in generale a parità di AIC è preferibile scegliere quello con un più basso **numero di parametri**.

Proviamo ora a cimentarci con una serie finanziaria reale. In particolare proponiamo una analisi dell'indice di riferimento dei prezzi di mercato **mibtel** al 09/04/2009.

```
>  dati <- read.csv("C:\\R\\mibtel.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1] "Date"        "Open"        "High"        "Low"         "Close"
"Volume"
[7] "Adj.Close"
> plot(Close, type = "l")
```

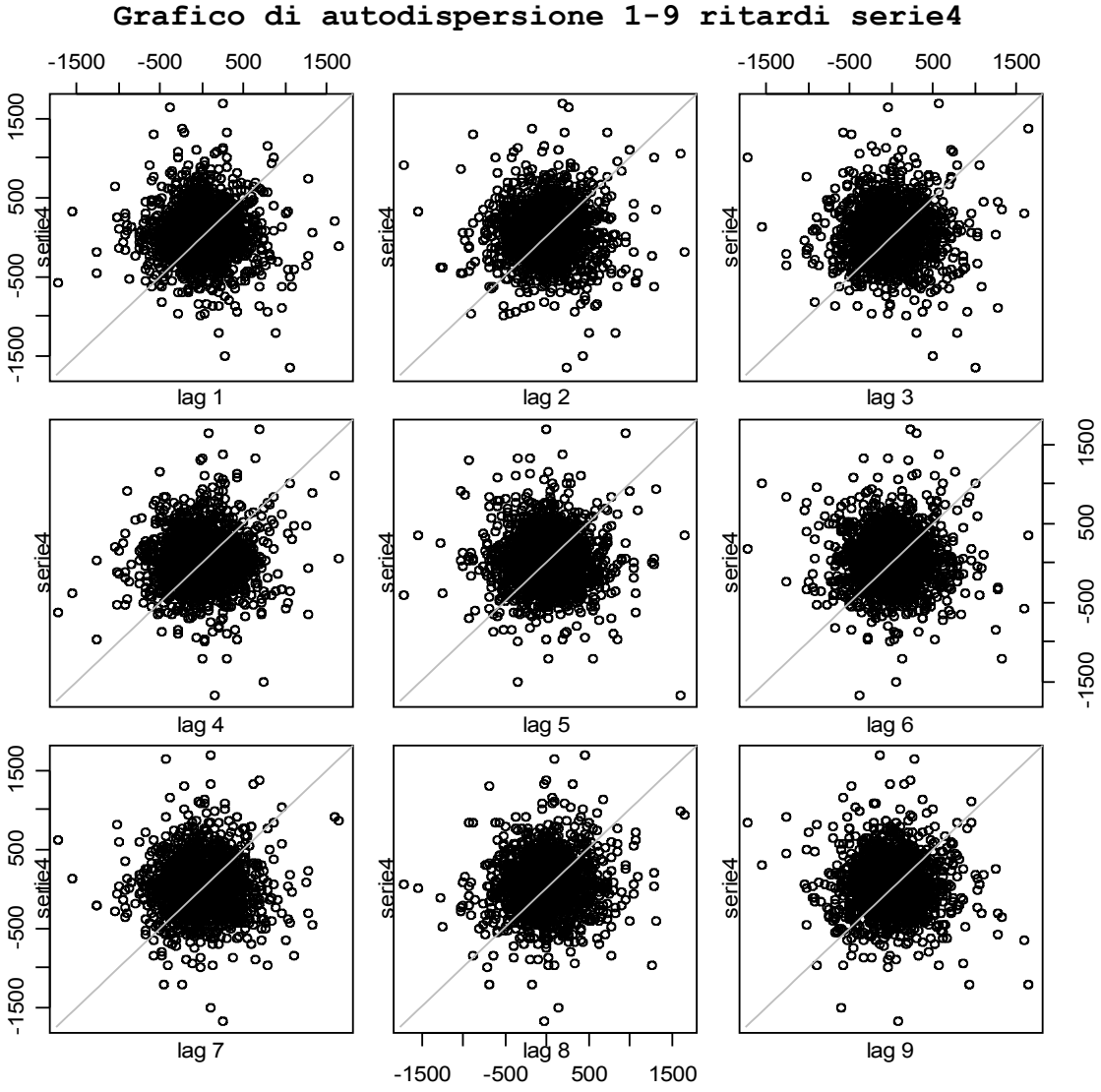


```
> serie4 <- diff(Close)
> plot(serie4, type = "l", main = "serie4 = (Close t) - (Close t-
1)")
```

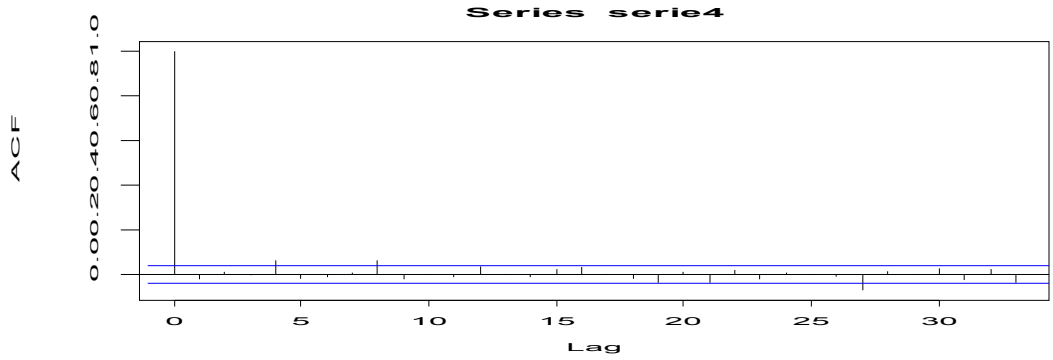


Abbiamo differenziato la serie evidentemente non stazionaria, ottenendo una serie oscillante intorno alla media.

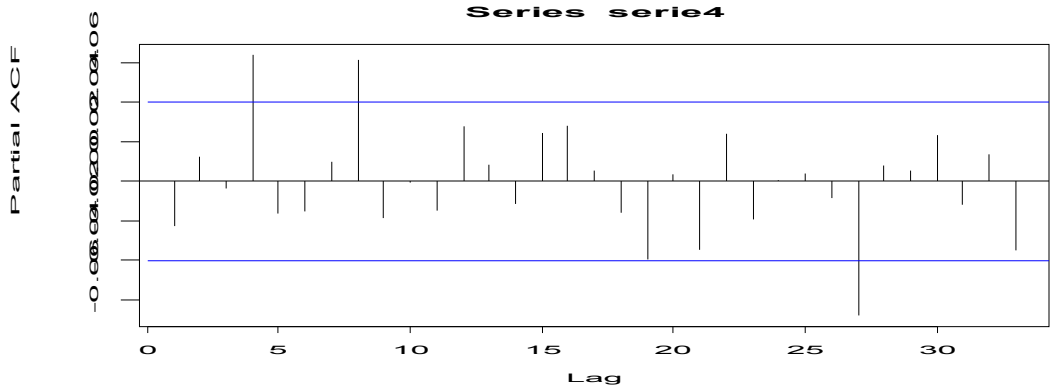
```
> lag.plot(serie4, 9)
```



```
> acf(serie4)
```




```
> pacf(serie4)
```

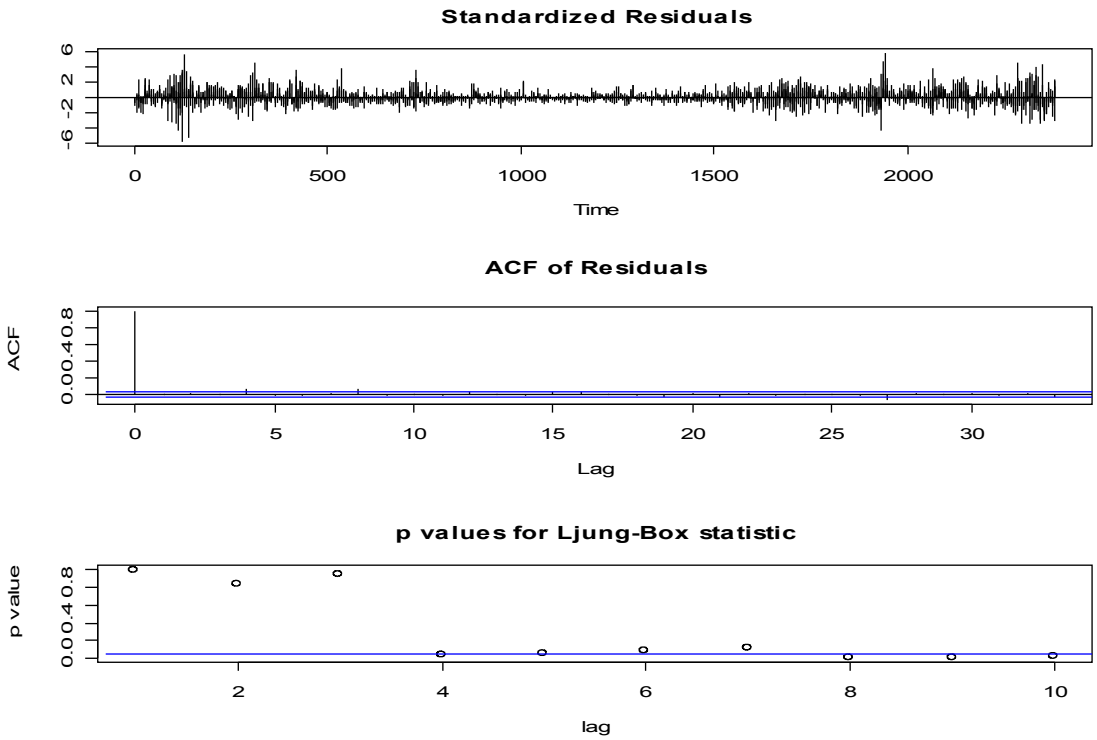


Decisamente la funzione di autocorrelazione ed autocorrelazione parziale sono piuttosto strane: indicano entrambe forme di correlazione a salti dopo il primo ritardo. Non è ben chiaro a che modello dobbiamo fare riferimento. Fra l'altro il grafico di autodispersione non ci aiuta molto. Proviamo con un arma(1,1)

```
> arima101 <- arima(serie4, order = c(1, 0, 1))
> arima101

Call:
arima(x = serie4, order = c(1, 0, 1))

Coefficients:
          ar1      ma1  intercept
      -0.0111  -0.0113     5.9825
s.e.   1.2660   1.2504     5.7809

sigma^2 estimated as 83290:  log likelihood = -16881.13,  aic =
33770.25
```

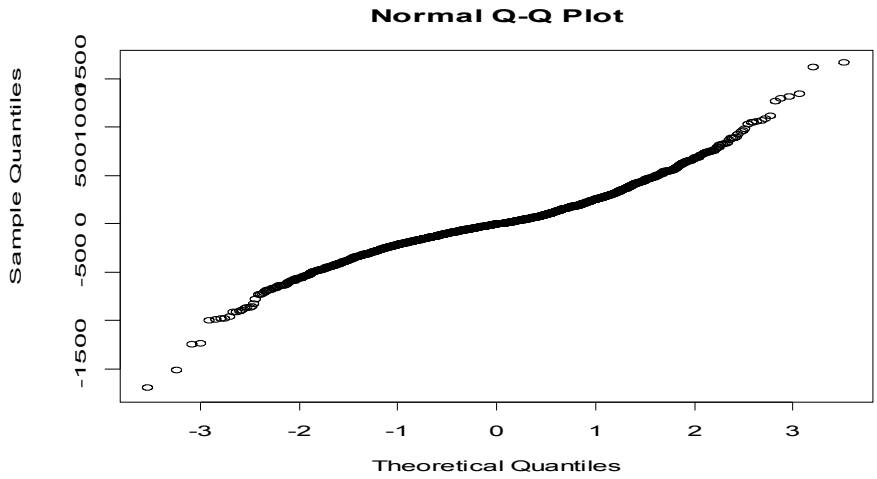
Dalla regressione otteniamo dei parametri poco significativi; l'AIC è alto. Il modello sembra non spiegare molto bene la serie. Facciamo un po' di diagnostica.

```
> tsdiag(arima101)
```



Dai grafici ci facciamo un'idea di come i residui, pur oscillando intorno allo zero non sembrano avere una distribuzione WN; i p-valori del test Ljung Box di autocorrelazione sono significativi solo fino al ritardo 3, dopo di chè oscillano intorno al valore di soglia. Proviamo con un normality plot

```
> qqnorm(arima101$residuals)
```

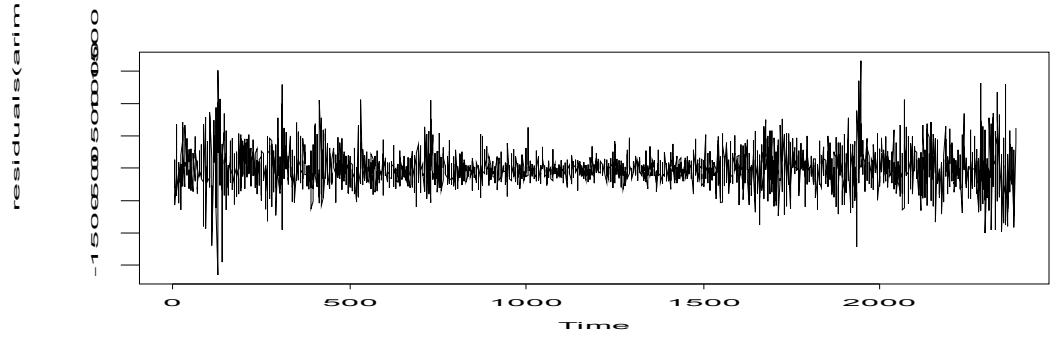



```
> kurtosis(residuals(arima101))
[1] 6.401948
```

Se proviamo con un arima (2,0,2) la situazione migliora un po'.

```
> arima202 <- arima(serie4, order = c(2, 0, 2))
> arima202

Call:
arima(x = serie4, order = c(2, 0, 2))

Coefficients:
          ar1     ar2     ma1      ma2  intercept
      -0.2522  0.7007  0.2435  -0.6800     5.8578
s.e.   1.7734  1.7108  1.7304   1.6333     6.0267

sigma^2 estimated as 82901:  log likelihood = -16875.58,  aic =
33763.15
```

```
> plot(residuals(arima202))
```

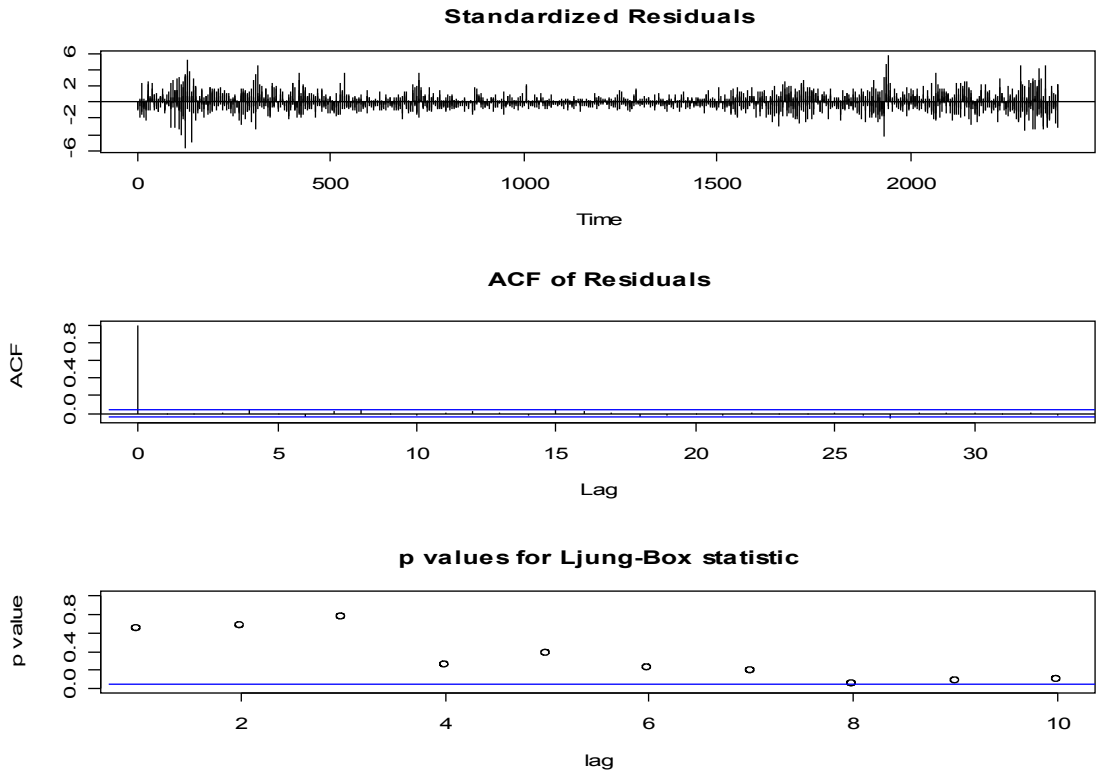


I coefficienti risultano più significativi. Se calcoliamo l'indice di curtosi, scopriamo che il valore è decisamente superiore a 3, il che significa che la distribuzione è leptocurtica ed ha code "pesanti". Osservando il grafico dei residui è ovvio che non possiamo essere soddisfatti dei nostri modelli. Eppure il trend è stazionario:

```
> adf.test(serie4)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  serie4
Dickey-Fuller = -12.5307, Lag order = 13, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

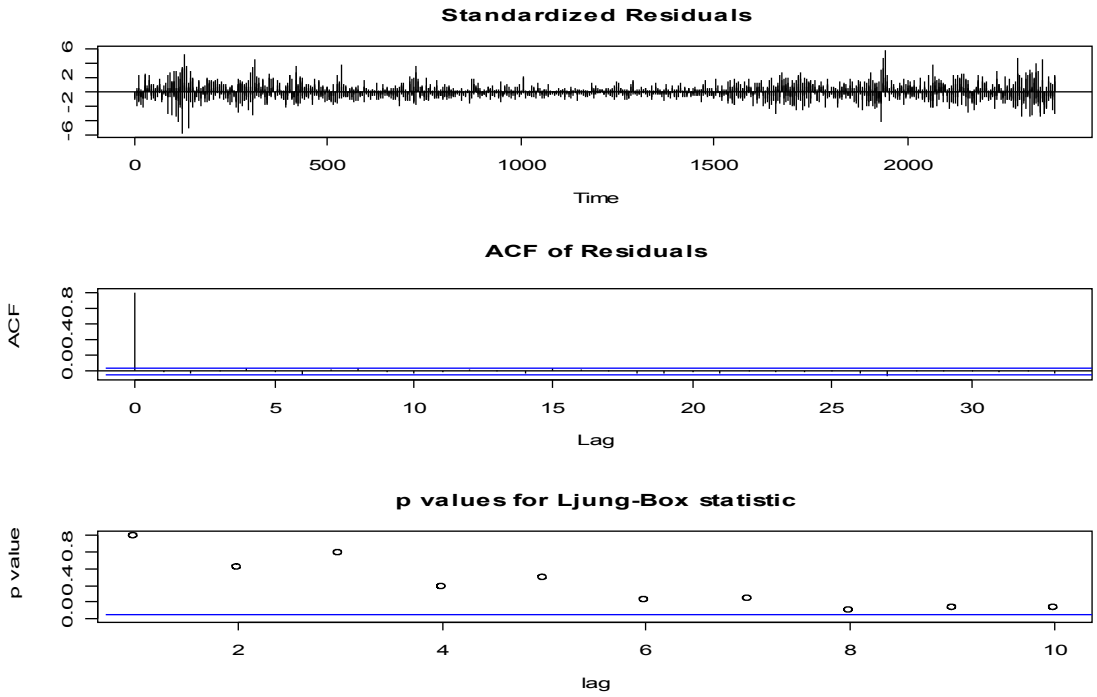
Con **adf.test()**, funzione della libreria **"tseries"**, operiamo il test **Adjusted Dickey-Fuller** sulla serie4, il cui valore conferma la veridicità dell'ipotesi alternativa di stazionarietà. Stiamo andando per tentativi su modelli arima con componenti significative AR ed MA, incrementando il numero di componenti per cercare un adattamento soddisfacente. Ricordando che non è mai buona cosa aumentare a dismisura i ritardi, poiché si "appesantisce" la regressione, otteniamo i seguenti risultati diagnostici per le simulazioni arima202, arima302, arima203.

```
> tsdiag(arima202)
```

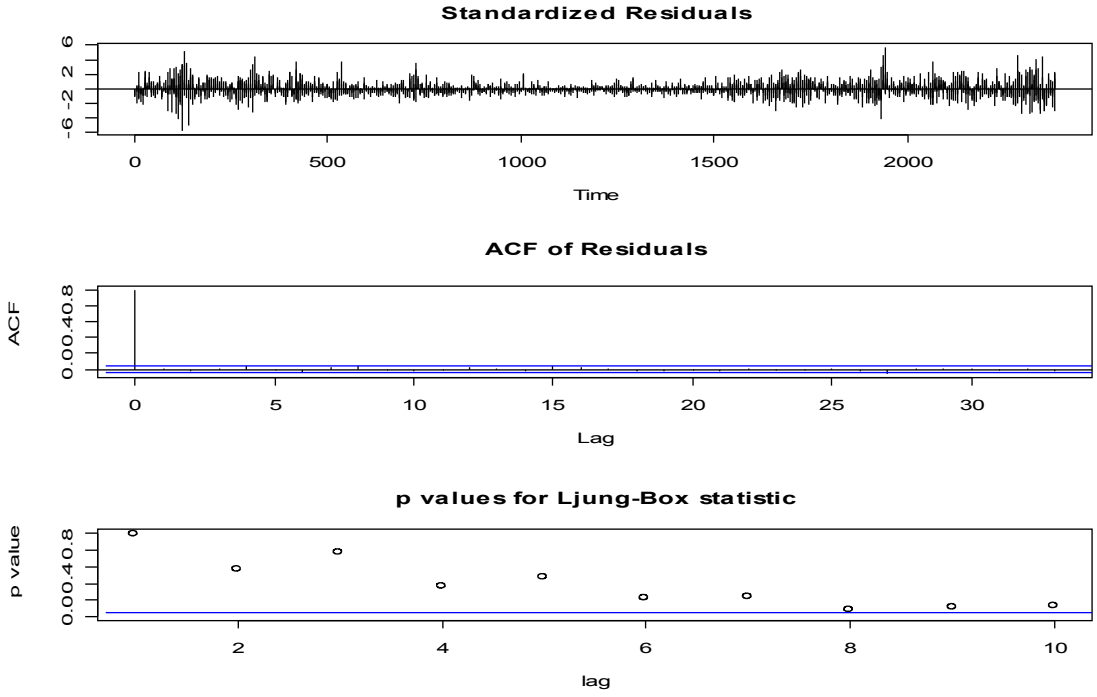



```
> arima302 <- arima(serie4, order = c(3, 0, 2))
> arima302

Call:
arima(x = serie4, order = c(3, 0, 2))

Coefficients:
          ar1     ar2     ar3     ma1      ma2  intercept
      -0.0948  0.8662  0.0139  0.0763  -0.8402     5.8588
s.e.   0.1061  0.0939  0.0220  0.1041   0.0982     6.4826
sigma^2 estimated as 82859:  log likelihood = -16874.97,  aic =
33763.94

> arima203 <- arima(serie4, order = c(2, 0, 3))
> arima203

Call:
arima(x = serie4, order = c(2, 0, 3))

Coefficients:
          ar1     ar2     ma1      ma2     ma3  intercept
      -0.1260  0.8237  0.1063  -0.7970  0.0166     5.9057
s.e.   0.1317  0.1269  0.1332   0.1278  0.0214     6.3573

sigma^2 estimated as 82858:  log likelihood = -16874.95,  aic =
33763.91
```

```
> tsdiag(arima302)
```




```
> tsdiag(arima203)
```




```
> kurtosis(arima302$residuals)
[1] 6.282393

> kurtosis(arima203$residuals)
[1] 6.271393
```

Con l'implementazione dei coefficienti del modello riusciamo ad ottenere un miglioramento sui p-valori del Ljung-Box. Abbiamo anche introdotto un test per confermare la stazionarietà del **processo integrato di primo ordine** serie 4, ottenendo due modelli sostituti: arima302 ed arima203. Tuttavia la modellistica non soddisfa le nostre esigenze: vogliamo un adattamento del modello il più possibile rispondente alle caratteristiche della serie.
Proviamo a fare un ulteriore passo:

```
> Box.test(residuals(arima302)^2, lag = 1, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  residuals(arima302)^2
X-squared = 49.449, df = 1, p-value = 2.036e-12
```

Questa funzione di R è la **Box.test** che ci permette di effettuare il test di **Ljung-Box**(o la variante di **Box-Pierce**) su di una serie. Lo utilizziamo per vedere l'autocorrelazione dei residui e dei quadrati dei residui dei modelli stimati. Possiamo provare anche per ritardi superiori al primo.

```
> Box.test(residuals(arima302)^2, lag = 2, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  residuals(arima302)^2
X-squared = 163.3968, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

```
> Box.test(residuals(arima302), lag = 8[12], type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  residuals(arima302)
X-squared = 13.6346, df = 8, p-value = 0.0918
```

I valori si impennano, mostrando una forte autocorrelazione quadratica. Abbiamo quindi bisogno di un'ulteriore generalizzazione per modellare la serie in questione e cogliere un'eventuale **eteroschedasticità condizionale.**
Tale generalizzazione è fornita dai modelli **ARCH** in cui, anche se le osservazioni sono serialmente incorrelate, esiste una forma di dipendenza dal tempo dovuta al fatto che la varianza condizionata dipende dalle osservazioni precedenti. In un ARCH(1) si assume che

$$x_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0,\sigma_t) \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * x_{t-1}^2 \ .$$

Proviamo allora a stimare un modello ARCH(1) sui residui del modello, vediamo se in questo modo siamo in grado di "spiegare" in

12 Il valore per lag = 8 è appena sotto soglia come conferma il grafico.

modo più adeguato la dipendenza temporale delle serie. Abbiamo bisogno della biblioteca **"tseries"**, estensione di ts: la funzione è **"garch()"** simile ad "arima()". **GARCH(p,q)** è la generalizzazione di **ARCH(p)** in cui la varianza al tempo t è espressa come

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad .$$

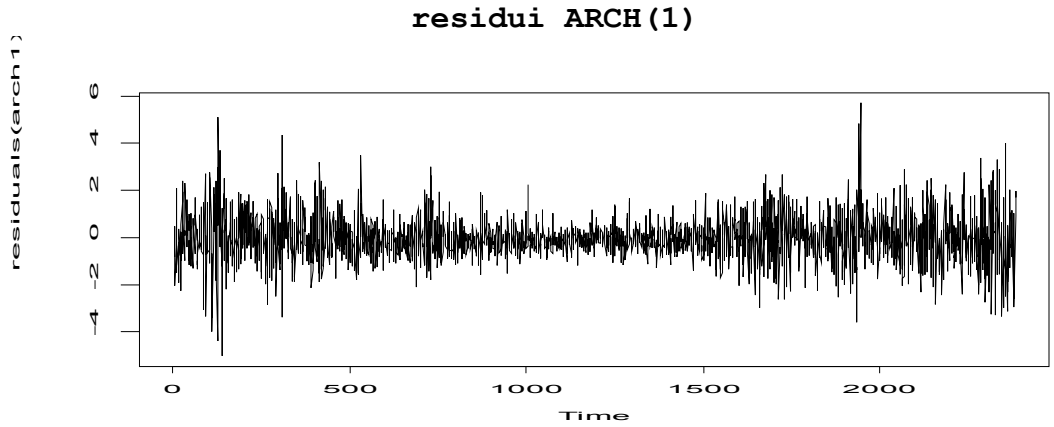
```
> arch1 <- garch(residuals(arima302), order = c(0, 1))

 ***** ESTIMATION WITH ANALYTICAL GRADIENT *****

> summary(arch1)

Call:
garch(x = residuals(arima302), order = c(0, 1))

Model:
GARCH(0,1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-5.03870 -0.50401 -0.04538  0.45441  5.70857

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 7.875e+04   2.138e+03   36.835  < 2e-16 ***
a1 1.548e-01   2.118e-02    7.307 2.73e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Diagnostic Tests:

        Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 900.2547, df = 2, p-value < 2.2e-16


        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.0332, df = 1, p-value = 0.8554
```

I coefficienti del modello sono significativi ma questo non ci basta per dire se possiamo ritenerci soddisfatti. Vogliamo vedere come si comportano i residui. Ricordiamo che ARCH(1) può anche essere scritto come

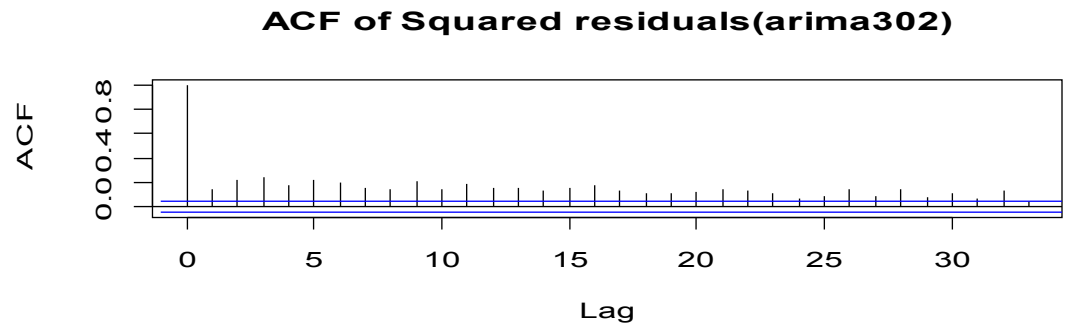
$$x_t = \sigma_t u_t \qquad u_t \sim N(0,1)$$

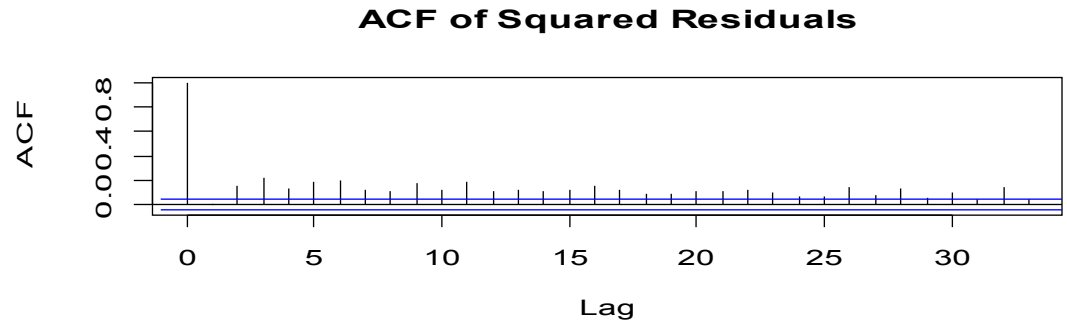
Quindi la nostra diagnostica dovrà consistere nel controllare che i residui u_t provengano da un processo white noise. Un primo segnale ci viene riportato dai due test dell'output: il Ljung-Box ci dice che i residui sono incorrelati tra loro, mentre il Jarque Bera ci segnala che i livelli di simmetria e di curtosi sono diversi da quelli di una normale. Effettuando un grafico dei residui notiamo che la distribuzione della serie è simile all'originale. Anche la distribuzione della densità non varia ed i q-plot mostrano una distribuzione con code spesse.

Si può avere un sommario dei grafici con il semplice comando **"plot(arch1)"**.



Si capisce che il problema rimane la curtosi: le code continuano ad essere pesanti, bisogna calcolare una versione robusta degli standard errors.



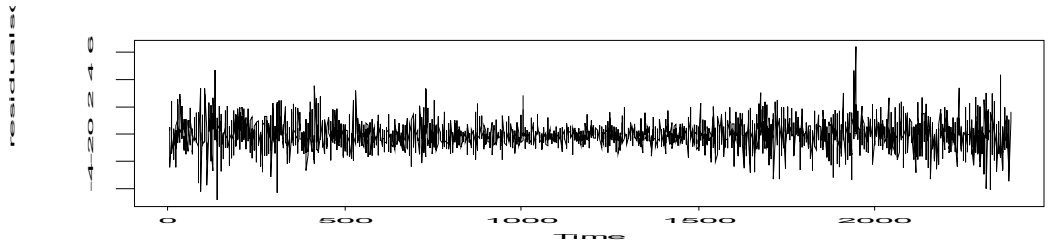


Dal grafico ACF notiamo comunque che un miglioramento c'è stato: i quadrati dei residui sono leggermente meno correlati dei residui originali: tuttavia l'autocorrelazione permane. ARCH(1) non ci può soddisfare ed è necessario trovare un altro modello. Potremmo aumentare il numero dei parametri α ma spesso accade che così facendo sia necessario aggiungerne parecchi prima di eliminare l'autocorrelazione quadratica. Ad esempio ARCH(2)

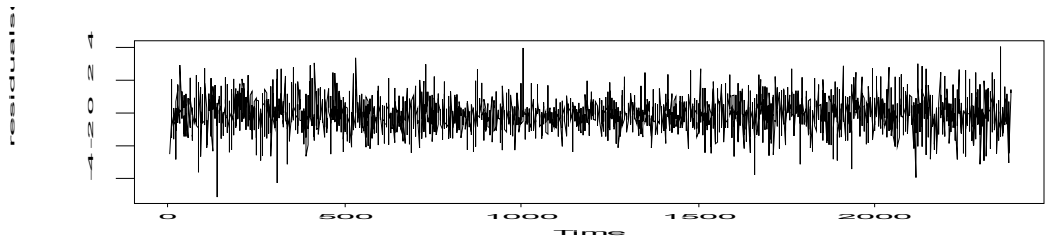
```
> arch2 <- garch(residuals(arima302), order = c(0, 2))

 ***** ESTIMATION WITH ANALYTICAL GRADIENT *****
> summary(arch2)

Call:
garch(x = residuals(arima302), order = c(0, 2))

Model:
GARCH(0,2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.85470 -0.57265 -0.05127  0.49563  6.40724

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 4.820e+04   1.583e+03   30.450  < 2e-16 ***
a1 1.426e-01   2.224e-02    6.409 1.46e-10 ***
a2 3.023e-01   2.800e-02   10.794  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Diagnostic Tests:

        Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 643.6032, df = 2, p-value < 2.2e-16


        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.6775, df = 1, p-value = 0.4104
```

Si nota dai grafici che la distribuzione dei residui continua a presentare code spesse e l'autocorrelazione quadratica è diminuita ma non scomparsa. Con un ARCH(5) la distribuzione dei residui è più omogenea e l'autocorrelazione quadratica ridotta ai valori di soglia che vengono solo sfiorati. Sembrerebbe quindi che la nostra serie mibtel sia modellabile con un arima302 (con componenti AR(3) MA(2) integrato) i cui residui seguano un andamento ARCH(5).

Residui arch2

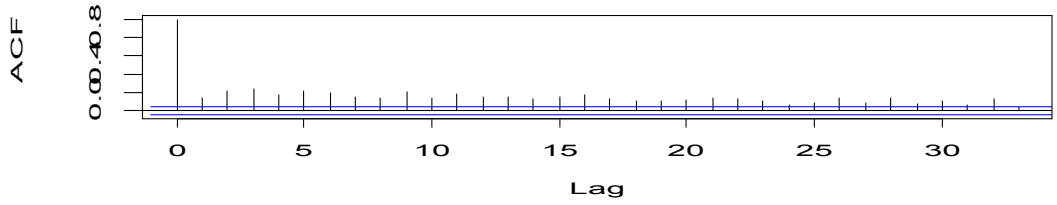


residui arch5

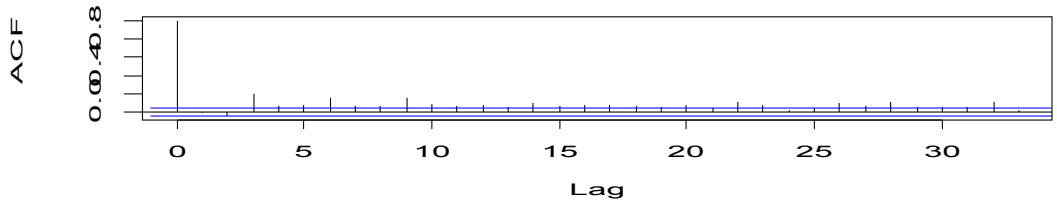


arch2

ACF of Squared residuals(arima302)

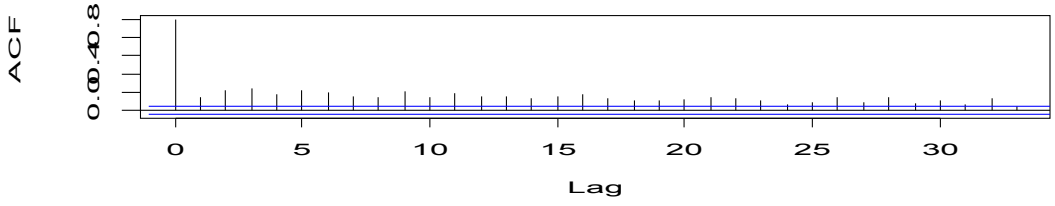


ACF of Squared Residuals

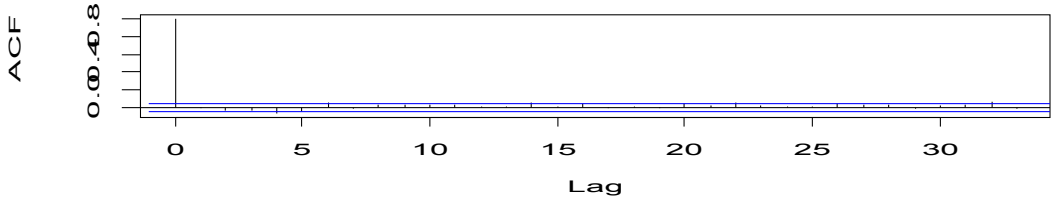


arch5

ACF of Squared residuals(arima302)



ACF of Squared Residuals

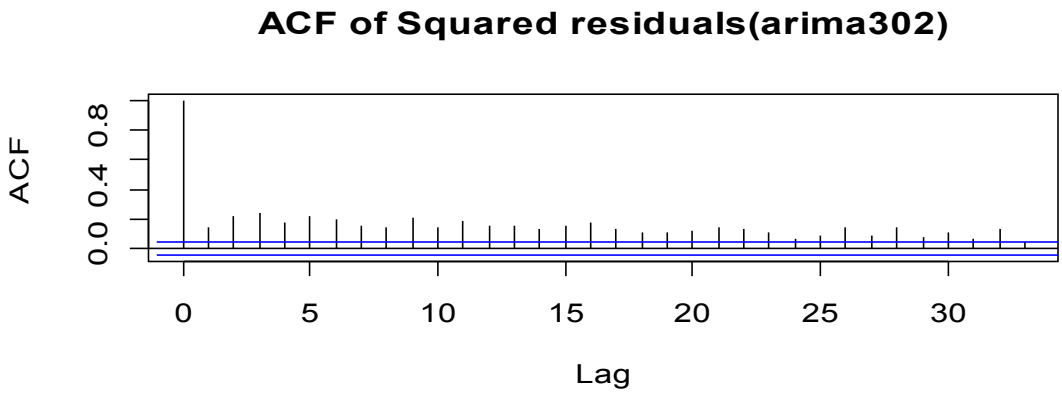


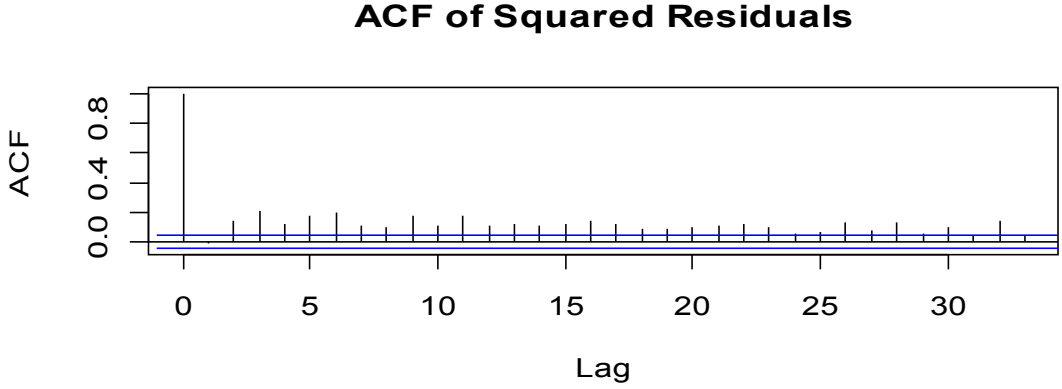
Passiamo direttamente alla generalizzazione GARCH(p,q): proviamo a vedere se nel nostro caso un modello GARCH(1,1) ottiene un adattamento migliore.

```
> garch11 <- garch(residuals(arima302), order = c(1, 1))

 ***** ESTIMATION WITH ANALYTICAL GRADIENT *****

> summary(garch11)

Call:
garch(x = residuals(arima302), order = c(1, 1))

Model:
GARCH(1,1)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-5.04727 -0.50563 -0.04588  0.45112  5.72946

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 7.460e+04   4.295e+03   17.372  < 2e-16 ***
a1 1.719e-01   2.356e-02    7.296 2.96e-13 ***
b1 3.173e-02   3.649e-02    0.870    0.385
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Diagnostic Tests:
        Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 861.0273, df = 2, p-value < 2.2e-16


        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 0.2983, df = 1, p-value = 0.585
```

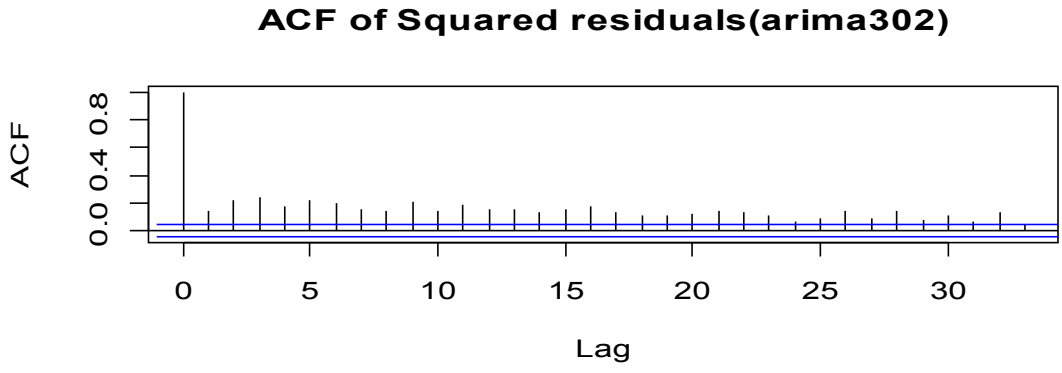
E' possibile che il GARCH riesca a cogliere dipendenze temporali che l'ARCH in prima battuta non coglie. In realtà, in questo caso la correlazione quadratica sembra essere meglio approssimata da ARCH(5) che da GARCH(1,1). In effetti dai grafici successivi e da prove effettuate non si ha alcun miglioramento nell'implementare un modello GARCH per l'autocorrelazione quadratica. Non c'è insomma, almeno in questo primo ambito di analisi, soluzione di risparmio. Sembra che con l'ARCH(5) i residui siano più simili ad un white noise ed i problemi di stima sufficientemente appianati. La curtosi della distribuzione è di 4.152341, denunciando ancora un po' di spessore delle code.

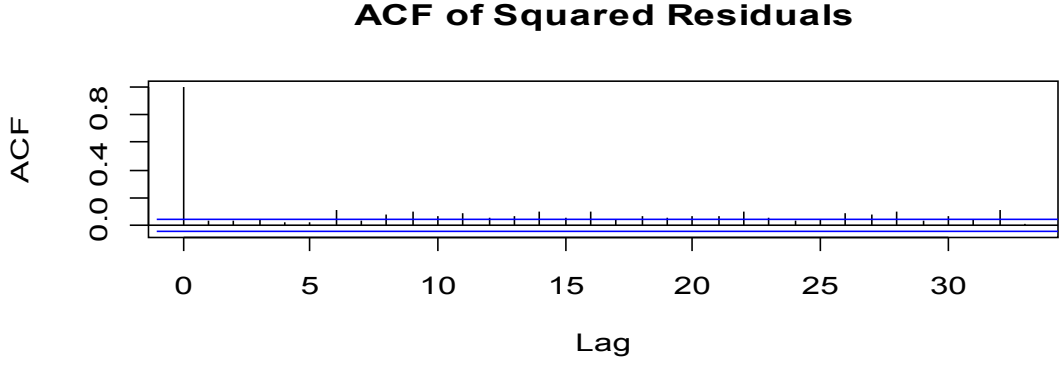
garch11





garch55





2.6 Appendice statistica B

Riguardo la stazionarietà di una serie storica (Guirreri 2008), esistono una serie di test per il controllo della presenza o meno di radici unitarie, che sono più rigorosi rispetto alla semplice analisi grafica della serie. Tali test vanno sotto il nome di **"test per le radici unitarie" (Unit-root test)**. Altri test per diagnosticare la stazionarietà di una serie nel caso univariato, sono il test di **Box-Pierce** ed il test di **Ljung-Box** questi due prendono in considerazione m autocorrelazioni di ordine d

$$\rho_d = \frac{\sum_{t=1}^{T-d} (y_t - \check{y}_T)(y_{t+d} - \check{y}_T)}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \check{y}_T)^2}$$

dove $\check{y}_T$ è la media aritmetica della serie storica. Il test Box-Pierce è basato sulla seguente statistica

$$Q_m = T \sum_{d=1}^{m} \rho_d^2,$$

mentre il test di Ljung-Box è calcolato secondo la seguente statistica

$$Q'_m = T(T+2) \sum_{d=1}^{m} \frac{\rho_d^2}{T-d}.$$

Si dimostra che, sotto l'ipotesi nulla H_0 di stazionarietà, questi due test si distribuiscono asintoticamente secondo una variabile χ_v^2 con v = m gradi di libertà.

Tra gli unit-root test ricordiamo

- l'**A.D.F.** o **Adjusted Dickey Fuller test**
- il **K.P.S.S.** o **Kwiatkowski , Phillips, Schmidt, Shin (1992)**

A.D.F.[13] **–** E' un test univariato ed assume che una parte del processo y_t abbia una struttura ARMA, per cui è stimata la seguente regressione:

$$y_t = \beta' D_t + \Phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \Delta y_{t-j} + \epsilon_t$$

dove D_t è un vettore che contiene termini deterministici e β' è un parametro da stimare, mentre le p valriabili differenziate ritardate, Δy_{t-j}, descrivono la struttura degli errori del processo. Il valore di p è scelto in modo da rendere serialmente incorrelati gli errori ϵ_t, che sono anche assunti essere

13 Un esempio del test è stato riportato precedentemente.

omoschedastici.
La scelta di p troppo piccolo causerà una distorsione del test dovuta alla rimanente correlazione seriale degli errori mentre un valore elevato di p avrà ripercussioni sulla potenza del test. Un metodo pratico per stimare il valore di p, suggerito da Schwert(1989), è

$$p_{max}=[12(\frac{T}{100})^{\frac{1}{4}}]$$

Per poter eseguire il test ADF in R si può fare ricorso o al pacchetto **"vars", "tseries"** o **"urca".**

K.P.S.S. - E' un test di stazionarietà, per cui il sistema di ipotesi che si intende saggiare è del tipo (3.1), in cui la serie si assume essere I(0) contro l'alternativa che sia non stazionaria o che abbia delle radici unitarie. Si basa sul seguente modello

$$y_t=\beta' D_t+\mu_t+u_t$$
$$\mu_t=\mu_{t-1}+\epsilon_t$$

dove $\epsilon_t \sim WN(0,\sigma_\epsilon^2)$, D_t indica la parte deterministica (costante o costante più trend), u_t è un processo I(0) che può essere eteroschedastico mentre μ_t è un processo random walk e β è un parametro da stimare.

Il sistema di ipotesi che si saggia con KPSS è il seguente

$$H_0:\sigma_\epsilon^2=0$$
$$H_1:\sigma_\epsilon^2>0$$
(3.1)

Sotto H_0, si ha che y_t è un processo stazionario in quanto μ_t è una costante. La statistica test è il moltiplicatore di Lagrange (LM) utilizzato per saggiare il sistema(3.1).
Nel loro studio gli autori dimostrano che il test converge ad una funzione di un moto browniano standard che dipende dalla forma dei termini deterministici D_t ma non dai valori dei loro coefficienti β'. Il test KPSS è un test sulla coda destra della sua distribuzione, cosicché l'ipotesi nulla di stazionarietà è rigettata al livello 100 α % se la statistica test è maggiore del 100 $(1-\alpha)$ % quantile della sua distribuzione. In R il test KPSS è eseguito tramite la funzione **ur.kpss** del paccheto **"urca"**, oppure tramite la funzione **kpss.test** del pacchetto **"tseries"**.

```
> kpss.test(serie4)

        KPSS Test for Level Stationarity

data:  serie4
KPSS Level = 0.2651, Truncation lag parameter = 11, p-value = 0.1
```

Capitolo 3:
Analisi dei mercati finanziari[14]

L'approccio analitico – nei mercati finanziari l'analisi tecnica ed affini - concorre a spiegare di fatto elementi di teoria economica. E' spesso difficile identificare uno stretto nesso tra teoria e pratica: abbiamo visto che l'analisi tecnica non batte sistematicamente il mercato ed è bene tenere presente gli sviluppi del contesto macroeconomico per utilizzare le tecniche di analisi in modo appropriato. Per contro queste ultime possono essere utilizzate per consolidare le congetture. Dopo un'introduzione sui fondamentali economici, segue una digressione sugli strumenti e le tecniche di previsione in R ed una analisi sull'integrazione dei mercati con l'introduzione del test di Johansen.

3.1 Analisi macroeconomica

L'analisi macroeconomica studia le evoluzioni delle principali variabili economiche aggregate (Gerbino 2008) in cui si riflette lo stato di salute del sistema economico e le conseguenze sui mercati finanziari della loro evoluzione. L'obbiettivo principale è la costruzione di scenari di medio-lungo termine in grado di orientare i movimenti più ampi dei mercati.

Le principali variabili che vengono osservate sono:

- **indicatori di crescita economica:**

1. PIL
   - produzione industriale
   - consumi
   - investimenti
   - variazioni delle scorte
   - scambi con l'estero
2. Disoccupazione

- **indicatori monetari:**

1. inflazione
2. tassi di interesse

Esiste inoltre una serie di altre rilevazioni statistiche in merito alla attività economica ed ai comportamenti dei principali operatori economici in grado di anticipare o proporre indicazioni sulla dinamica futura delle principali variabili economiche. Questi indicatori, detti **leading indicators**, sono considerati con

14 Definizioni Marchesoni, Novellini, Tramontana "Analisi fondamentale"(sole 24 ore); M. Pring "Analisi tecnica dei mercati finanziari" (Mc Graw-Hill); Gerbino http://www.borsaprof.it

attenzione poiché i mercati tendono a scontare in anticipo l'andamento futuro dell'economia.

La tabella seguente esprime un quadro sintetico delle relazioni esistenti tra l'aumento di ciascuna delle principali variabili macro e l'andamento dei vari mercati. Una relazione positiva significa che l'aumento della variabile provoca normalmente un aumento nelle quotazioni del mercato, mentre una relazione negativa indica che l'aumento della variabile provoca una discesa nelle quotazioni del mercato. L'intensità della relazione indica la probabilità del verificarsi della relazione. "Forte" indica che la variazione della variabile economica molto probabilmente si riflette sul mercato; "debole" indica che la relazione è più incerta.

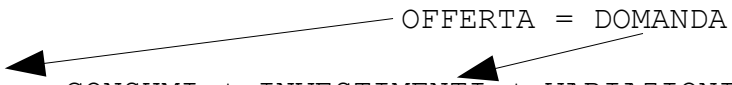
Influenza delle variabili economiche sui mercati

	MERCATI			
INDICATORE	**OBBLIGAZION.**	**AZIONARIO**	**VALUTARIO[15]**	**MAT. PRIME[16]**
PIL	Negativa-Forte	Positiva-Forte	Positiva-Debole	Positiva-Forte
Disoccupazione	Positiva-Forte	Negativa[17]-Debole	Negativa-Debole	
Inflazione	Negativa-Forte	Negativa[18]-Forte	Negativa-Forte	Positiva-Debole
Tassi di interesse	Negativa-Forte	Negativa-Forte	Positiva-Forte	

PIL - E' l'indicatore sintetico di crescita economica più utilizzato. Viene pubblicato su base trimestrale. Il dato definitivo viene fornito con tre mesi di ritardo, ma è preceduto da due stime preliminari mensili. Il suo andamento ha un forte impatto sui mercati obbligazionari ed azionari. Sui primi un aumento del Pil viene visto male, in modo particolare se ha ritmi eccessivamente sostenuti, poiché può portare "surriscaldamento" dell'economia ed aumento dei tassi di interesse, che hanno direttamente un impatto negativo sulle quotazioni.
Sull'azionario invece la relazione è positiva, poiché l'aumento del Pil dovrebbe comportare aumento degli utili aziendali e quindi dei prezzo dei titoli. Ovviamente una espansione economica eccessiva può condurre ad inflazione, per cui in tal caso la relazione si inverte.
Sul mercato dei cambi la relazione non è marcata, ma è generalmente diretta, poiché una maggiore solidità economica (ovviamente rispetto al paese della valuta con cui si cambia) dovrebbe attirare capitali, con conseguente rivalutazione del cambio.
I prezzi delle materie prime dipendono dalla domanda che cresce al crescere dell'economia mondiale, per cui la relazione è diretta. Siccome il PIL è un indicatore complessivo che inoltre viene

15 La relazione si riferisce al differenziale tra i due paesi e va intesa come positiva in caso di rivalutazione della moneta nazionale.
16 La relazione è valida considerando le variabili su scala mondiale, non soltanto nazionale.
17 In caso di bassa crescita in atto. In caso di surriscaldamento economico la relazione è positiva.
18 In caso di livelli rilevanti. In caso di inflazione molto bassa o di deflazione la relazione sarebbe positiva.

calcolato con un certo ritardo, si punta l'attenzione anche su altre variabili che riflettono particolari componenti del PIL. Alcune di esse si presentano anche come indicatori leading, poiché sono in grado di anticipare la futura evoluzione del PIL. Una considerazione molto importante è che il PIL dipende dall'evoluzione della domanda aggregata. A livello macroeconomico vale infatti la seguente relazione:



PIL = CONSUMI + INVESTIMENTI + VARIAZIONI SCORTE + EXPORT NETTO
(frecce → componenti rilevanti per l'analisi)

Pertanto l'analisi delle componenti della domanda può indicare la possibile evoluzione del PIL.

L'ANDAMENTO DEI PREZZI – Le statistiche sull'inflazione forniscono dati che vengono interpretati in modo sostanzialmente univoco sui mercati obbligazionari, azionari e valutari. L'inflazione è nemica dei mercati, perchè crea incertezza, difficoltà di rappresentazione della realtà, effetti distorsivi sulle regole di mercato.
Diminuisce inoltre i rendimenti reali delle attività finanziarie. L'effetto è soprattutto negativo sull'obbligazionario e l'azionario, a causa delle politiche monetarie che le autorità mettono rapidamente in atto per fronteggiarla (restrizioni nella liquidità e aumenti dei tassi di interesse), politiche che hanno effetto negativo sui prezzi dei titoli. Sul mercato valutario incide anche la perdita di competitività delle merci esportate, in grado di causare peggioramenti nella bilancia commerciale che, se si protraggono nel tempo, indeboliscono la valuta nazionale.
A livello di mercati delle materie prime il diffondersi dell'inflazione nel mondo segnala un surriscaldamento della crescita e consente ai prezzi di salire, anche se l'effetto non è rilevante. Spesso la relazione causa-effetto si inverte. Aumenti dei prezzi delle materie prime possono essere causa di pressioni inflazionistiche da costi.

TASSI DI INTERESSE – I tassi di interesse sono la variabile economica che ha l'impatto maggiore e più immediato sui mercati obbligazionari, azionari e valutari. L'effetto è così importante che i mercati tendono a muoversi sulla base di previsioni sul futuro andamento dei tassi, anticipando così gli eventuali movimenti ufficiali. Normalmente accade che i mercati si muovano sulla base dell'aspettativa del movimento dei tassi, al punto da scontare quasi completamente le decisioni di politica monetaria, prima che queste vengano prese. A volte accade addirittura che, quando la variazione dei tassi diventa ufficiale, essa non abbia più impatto sui mercati, poiché l'impatto è avvenuto in anticipo.
Le relazioni sono generalmente inverse sui mercati obbligazionari ed azionari. Sul primo in quanto l'aumento del tasso di interesse di mercato provoca la discesa delle quotazioni dei titoli a reddito fisso, poiché la cedola fissa, per aumentare il rendimento

e portarlo ad un livello adeguato ai nuovi tassi, deve rapportarsi a quotazioni inferiori. Sul mercato obbligazionario a reddito fisso vale infatti la seguente relazione:

Rendimento = Tasso nominale/Quotazione

Essendo fisso il tasso nominale espresso dalla cedola, l'aumento del rendimento può ottenersi soltanto deprimendo la quotazione.
Sul mercato azionario l'aumento dei tassi oltre che a riflettersi negativamente sui bilanci delle imprese tramite aumento degli oneri finanziari, crea la convenienza nella massa dei risparmiatori ad orientare i propri investimenti verso mercati obbligazionari che offrono maggiori rendimenti a scapito dell'investimento azionario. Questo produce uno spostamento dei flussi d'investimento che penalizza l'azionario.
Ovviamente il contrario capita ad entrare quando i tassi d'interesse vengono ridotti.
Sul mercato valutario un aumento dei tassi d'interesse reali (cioè al netto d'inflazione) che avvenga in un solo paese provoca variazioni positive nei movimenti di capitale che tendono ad entrare, attratti dai maggiori rendimenti. Ciò dovrebbe condurre ad un apprezzamento del cambio. Questi movimenti sono però in parte compensati da possibili uscite di capitali stranieri, precedentemente investiti sull'azionario, per cui l'effetto può essere diluito.
Non esistono dati in grado di anticipare l'andamento dei tassi d'interesse, essendo questo del tutto dipendente dalle decisioni delle Banche Centrali di ogni paese. I mercati si affidano all'interpretazione dei dati macroeconomici ed all'attenta lettura dei discorsi delle Autorità Monetarie, tentando in tal modo di prevederne le mosse future. Molto attese sono le riunioni dei comitati esecutivi delle Banche Centrali (riunione del FOMC in USA), dove vengono ufficialmente prese le decisioni sui tassi ufficiali.

3.2 Analisi fondamentale del mercato azionario

L'Analisi fondamentale tende ad individuare il **valore intrinseco** delle azioni di una società quotata.
Tale valore viene confrontato col valore espresso dal mercato. Si investe sui titoli sottovalutati, confidando nel fatto che *prima o poi il mercato correggerà la sottovalutazione*.

Metodologia

- **Analisi del contesto macroeconomico:** si valutano le condizioni e gli scenari macroeconomici globali relativi alle diverse aree economiche, al fine di determinare i mercati su cui investire.
- **Analisi settoriale:** si formulano previsioni sulle prospettive

future di business dei vari settori economici. Questa analisi può richiedere competenze molto particolari e può richiedere valutazioni che vanno al di là delle semplici considerazioni economico-finanziarie (es. biotecnologie, high tech).

- **Valutazione delle singole società:** si analizzano i bilanci e si costruiscono indici in grado di esprimere il valore intrinseco della società, che viene confrontato con la quotazione espressa dal mercato al fine di valutare la eventuale sottovalutazione dell'impresa.

Criteri di valutazione

L'analisi finanziaria ha espresso diverse metodologie di valutazione aziendale. Le più semplici e diffuse tipologie sono:

- **VALUTAZIONE ATTRAVERSO GLI INDICI DI BILANCIO:** Il bilancio viene riclassificato in base a criteri finanziari e vengono individuati indici in grado di esprimere la solidità e la redditività dell'impresa. Ne ricordiamo alcuni:

1. **Indice di solidità (DEBT/EQUITY):** rapporto tra Indebitamento finanziario e Patrimonio netto. Esprime la dipendenza dell'impresa dalle fonti di finanziamento esterne ed anche la vulnerabilità dell'impresa a variazioni nei tassi di interesse. Valori inferiori a 0,5 sono ottimali. Valori maggiori di 1 sono preoccupanti.
2. **Indice di redditività della gestione caratteristica (ROI):** rapporto tra utile operativo e capitale investito. Esprime la capacità di generare reddito con l'attività tipica dell'impresa. E' soddisfacente se supera il costo dell'indebitamento. In tal caso risulta conveniente all'impresa prendere danaro in prestito per investirlo nell'attività caratteristica (leverage).
3. **Indice di redditività globale (ROE):** rapporto tra utile netto e patrimonio netto. Esprime la capacità di remunerare il capitale proprio ed è un indicatore sintetico di efficienza. E' soddisfacente se supera il rendimento di investimenti privi di rischio (titoli di Stato).

- **METODO DEI MULTIPLI DI MERCATO:** Si costruiscono dei particolari indicatori che esprimono dei rapporti tra prezzo di mercato e particolari grandezze di bilancio. Tali indicatori (multipli) vengono poi paragonati con quelli espressi da un campione di aziende quotate il più possibile simili alla società da valutare. Il presupposto alla base di tale metodo è che il valore di una società non può differire in modo significativo dal valore espresso dal mercato per aziende di dimensioni analoghe, dello stesso settore ed operanti sui medesimi mercati geografici. Eventuali differenze significative rispetto al campione tendono ad essere prima o poi colmate.

1. **Rapporto Prezzo/Utili (P/E)-** E' il più usato e conosciuto. Esprime il rapporto tra il prezzo del titolo e l'utile netto

per azione. Spesso si usa l'utile storico, ma meglio sarebbe utilizzare l'utile atteso per l'esercizio in corso e per quelli futuri. Esprime il numero di anni che occorrono per ripagare con gli utili l'investimento effettuato. Rapporti bassi indicano sottovalutazione, alti invece sopravvalutazione. Non esiste un valore ottimale. Dipende dal settore di riferimento. Esistono differenze rilevanti tra i P/E medi dei vari settori. In linea di massima i settori più maturi hanno P/E inferiori, mentre i settori più innovativi e dotati di prospettive di crescita (settori growth) hanno P/E più alti. Scostamenti significativi dal P/E medio del settore di appartenenza, che non siano motivati da eventi eccezionali, sono un indicatore di possibile sopra/sottovalutazione.

2. **Rapporto prezzo/patrimonio netto (P/BV) –** Esprime la relazione tra prezzo e valore del patrimonio netto per azione (in inglese book value). Il **book value** è la differenza tra attività e passività di bilancio, oppure - è lo stesso – la somma di capitale sociale e riserve. E' un indicatore molto usato per la società dei settori finanziario, bancario, assicurativo, meno per le aziende industriali. Il rapporto P/BV indica quanto il mercato è disposto a pagare oltre il valore patrimoniale dell'azienda. P/BV < 1 indica sottovalutazione, poiché la valutazione espressa dal mercato è addirittura inferiore al valore patrimoniale, senza tener conto di alcuna prospettiva reddituale. P/BV < 0.5 indica pessima valutazione e rivela prospettive reddituali molto negative, forse anche rischi di crisi.

Esistono poi altri metodi di valutazione più sofisticati che richiedono dati che non sono facilmente disponibili.
I principali multipli ed anche alcuni indici di bilancio sono reperibili sui settimanali finanziari.

3.3 Elementi di analisi tecnica

"L'analisi tecnica è l'arte di identificare fin dall'inizio un movimento direzionale del mercato cha ha una buona probabilità di continuare nel tempo." (John Murphy)
Si basa su alcune asunzioni:

- il **comportamento sociologico** degli operatori finanziari e per lo più di tipo imitativo (effetto gregge);
- la **storia** si ripete, non in modo esatto ma analogo;
- i **prezzi** scontano tutto, anche quello che ancora non si sa;
- il mercato si muove in **"trend"**. Il trend in atto è probabile che duri finché non si hanno le prove che ne è iniziato un altro contrario.

L'analisi tecnica è uno strumento che si può applicare a tutti i mercati e da risultati migliori nei mercati più volatili.

I Movimenti di mercato:

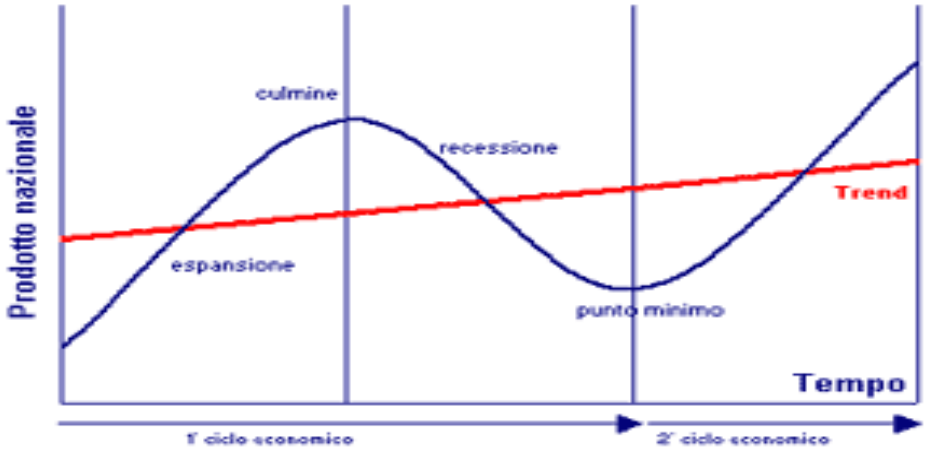
Movimento primario (Major trend) - E' la tendenza principale per la quale un mercato si definisce *"toro"* (Bullish o "rialzista") oppure *"orso"* (Bearish o "ribassista"). Dura da uno a più anni.
Movimenti secondari (Intermediate trend) - Si tratta di movimenti opposti alla tendenza principale in un mercato che nel lungo periodo sia bullish o bearish. Questi durano da tre settimane a molti mesi e possono rintracciare da un terzo a due terzi del progresso o regresso acquisito con il movimento primario; il ritracciamento più frequente è del 50%.
Movimenti minori (Minor trend) - Sono rialzi o ribassi di mercato che durano per un periodo limitatissimo di tempo, al massimo tre settimane.
Il volume degli scambi - Si espande durante un *bull market* e si contrae durante *un bear market.* Tuttavia quando un bear market si esuarisce con giornate di panico, in tali momenti si assiste a picchi di volume accompagnati a crolli nei prezzi.

Il ritmo del mercato:

Accumulazione – Situazione, normalmente al termine di un periodo ribassista in cui i prezzi si muovono lateralmente senza una particolare direzionalità e con volumi non elevati. Le "mani forti" (investitori che hanno la vista e/o gli strumenti migliori) accumulano titoli a prezzi bassi.
Convinzione – Le mani forti, dopo aver accumulato ed in presenza di condizioni economiche propizie cercano di spingere il mercato al rialzo pur senza volumi esplosivi, i prezzi cominciano dolcemente a salire ed intanto entrano sul mercato nuovi investitori.
Speculazione – La salita dei mercati convince sempre nuovi risparmiatori ad entrare magari anche precipitosamente. I volumi esplodono come pure i prezzi, spinti dalla domanda che supera di molto l'offerta. Il movimento assume caratteri emotivamente euforici e dura finché nuovi investitori affluiscono sul mercato.
Distribuzione – Quando quasi tutti i possibili compratori sono fluiti, le mani forti cominciano a vendere sui massimi, realizzando forti guadagni e distribuendo titoli agli ultimi arrivati a prezzi alti. Costoro si ritrovano in una situazione di detenzione rischiosa. Il mercato smette di salire ed effettua una prima correzione che da alcuni viene interpretata come l'ennesima occasione di entrare sul mercato.
Panico – La massa dei risparmiatori si accorge che il mercato ha invertito il trend tuttavia ormai i prezzi sono lontani dai livelli massimi. La successione di minimi dei prezzi, sempre più bassi, porta molti a liquidare le posizioni al meglio con forti perdite. Si verificano momenti di panico e crolli rilevanti nei prezzi.
Frustrazione – Il mercato sembra non smettere mai di scendere. Vendono anche molti risparmiatori che avevano resistito alle precedenti ondate ribassiste, realizzando così altri momenti di panico. Gran parte dei risparmiatori abbandona il mercato realizzando forti perdite e promette di non lasciarsi più ingannare un'altra volta. Si creano così le condizioni per la realizzazione di un minimo nei prezzi e di una lenta inversione rialzista del trend, che si attua mediante una nuova fase di accumulazione.

Analisi ciclica (intermarket)

Il ciclo economico dura circa 4/5 anni e si sviluppa come alternanza di una fase di espansione (ripresa) che culmina con crescenti pressioni inflazionistiche ed una fase di contrazione (recessione). I vari mercati hanno comportamenti differenti in relazione all'andamento del ciclo in quanto tendono, in misura diversa tra loro, ad anticipare il ciclo economico.
Mercato delle materie prime – E' quello maggiormente in fase con il ciclo. La salita dei prezzi accompagna l'espansione; la discesa accompagna la recessione.
Mercato azionario - Tende ad anticipare di qualche mese l'andamento del ciclo.
Mercato obbligazionario – Anticipa di circa un anno l'andamento del ciclo.



Si può suddividere il ciclo in **5 fasi**:

- **Fase 1 –** Il ciclo entra in recessione. Azioni e materie prime orientate al ribasso. Le obbligazioni raggiungono il minimo e si apprestano a svoltare.
- **Fase 2** – Il ciclo raggiunge il culmine della recessione. Le materie prime raggiungono i minimi. Le obbligazioni sono in rialzo, le azioni dopo aver raggiunto il minimo effettuano una inversione al rialzo.
- **Fase 3 –** L'economia si riprende. Tutti i mercati sono orientati al rialzo. Le obbligazioni raggiungono i massimi.
- **Fase 4** – La ripresa giunge al culmine. Le materie prime raggiungono i massimi. Le obbligazioni sono in fase ribassista, scontando aumenti dei tassi. Le azioni dopo aver raggiunto i massimi invertono il trend.
- **Fase 5** – L'espansione si riduce ed il sistema si avvia ad una recessione. Tutti i mercati sono al ribasso le obbligazioni raggiungono i minimi e si apprestano a svoltare.

3.4 Uno sguardo alle previsioni

Alle stime dei modelli ottenute con le funzioni arima() si può applicare la funzione **predict()** per avere delle previsioni basate sul modello stimato. E' necessario specificare il numero di istanti temporali per i quali si vuole ottenere la previsione **n.ahead**. Ad esempio

```
>  dati <- read.csv("C:\\R\\mibtel.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1] "Date"        "Open"        "High"        "Low"         "Close"
"Volume"
[7] "Adj.Close"
```

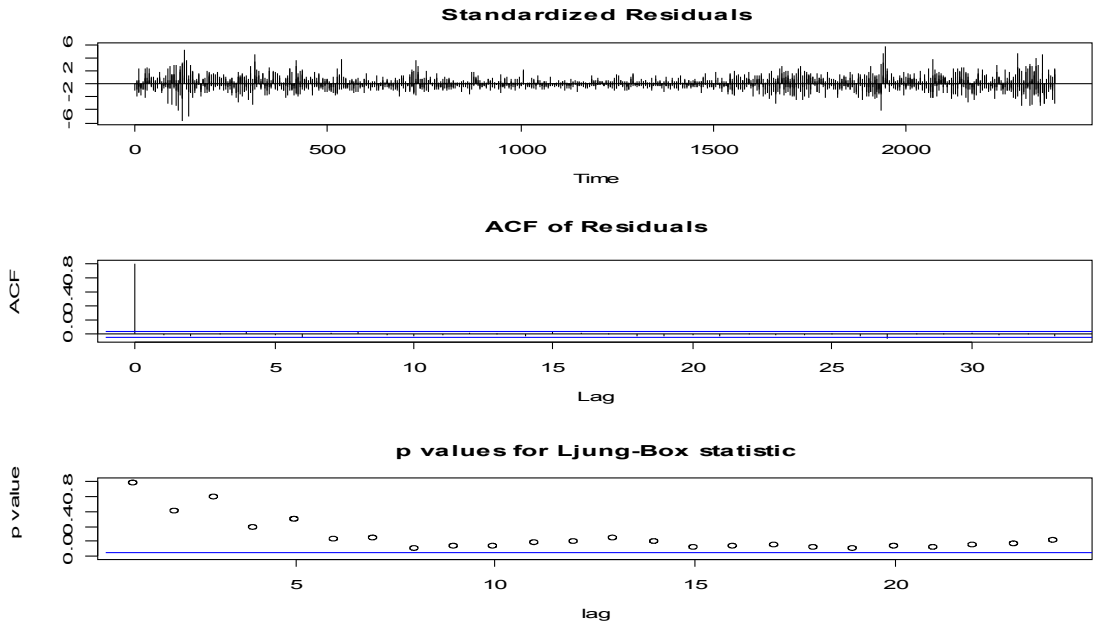
stima arima 312 sulla base della precedente analisi

```
> serie4b <- ts(Close)
> arima312 <- arima(serie4b, order = c(3, 1, 2))
> arima312

Call:
arima(x = serie4b, order = c(3, 1, 2))

Coefficients:
          ar1     ar2     ar3     ma1      ma2
      -0.0890  0.8718  0.0139  0.0708  -0.8453
s.e.   0.1034  0.0908  0.0221  0.1013   0.0954

sigma^2 estimated as 82889:  log likelihood = -16875.4,  aic =
33762.79
```

confronto arima 302 sulla serie differenziata

```
> arima302

Call:
arima(x = serie4, order = c(3, 0, 2))

Coefficients:
          ar1     ar2     ar3     ma1      ma2  intercept
      -0.0948  0.8662  0.0139  0.0763  -0.8402     5.8588
s.e.   0.1061  0.0939  0.0220  0.1041   0.0982     6.4826
sigma^2 estimated as 82859:  log likelihood = -16874.97,  aic =
33763.94
```

arima312



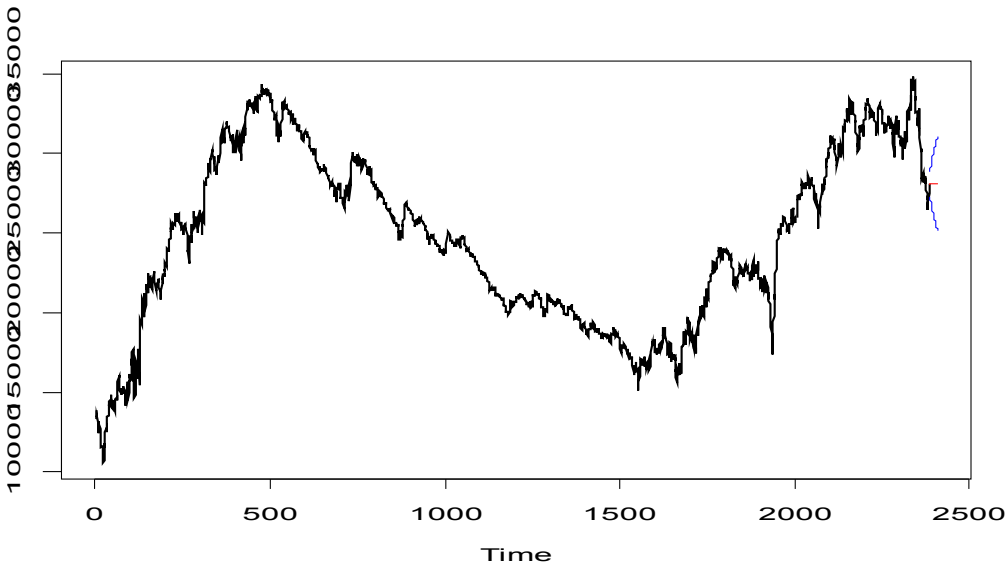
Come si può notare dal grafico dei residui permane il problema di autocorrelazione quadratica rilevata precedentemente.

```
> Box.test(residuals(arima312)^2, lag = 1, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  residuals(arima312)^2
X-squared = 49.8226, df = 1, p-value = 1.683e-12
```

Proviamo ad usare la funzione predict() sul modello: tracciamo il grafico delle predizioni puntuali rispetto alla serie originale inserendo le bande o intervalli di confidenza della predizione costruiti sui valori d'output della funzione (pg. 87).

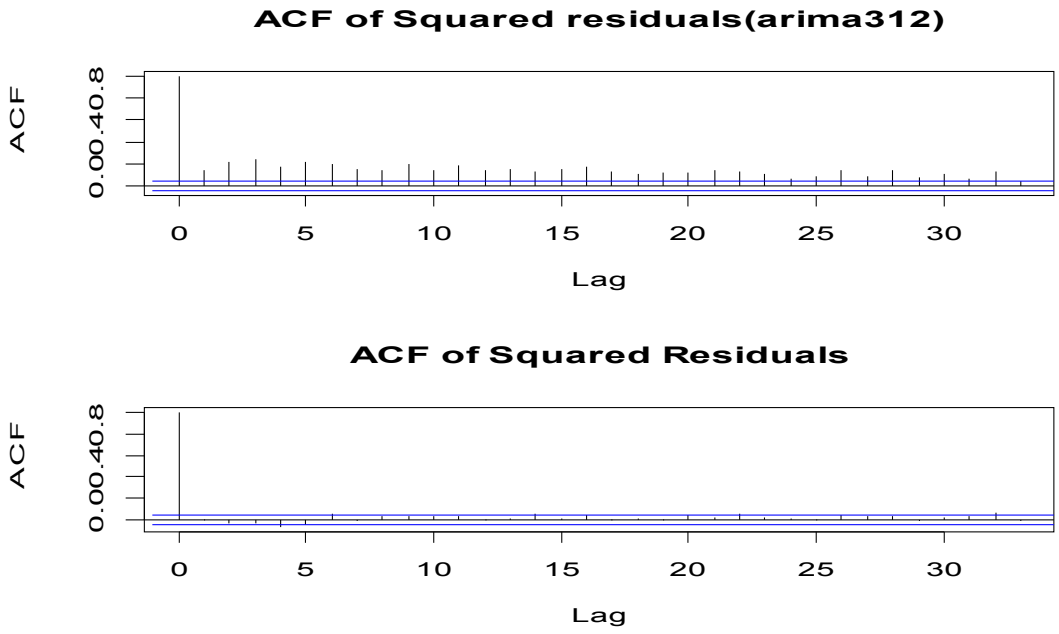
```
> pred <- predict(arima312, n.ahead=24)
> pred
$pred
Time Series:
Start = 2385
End = 2408
Frequency = 1
  [1]  28070.90  28089.51  28076.63  28093.68  28081.19  28096.99
28084.93 28099.60
  [9]  28088.00  28101.66  28090.53  28103.27  28092.63  28104.52
28094.36 28105.49
[17]  28095.81  28106.23  28097.02  28106.78  28098.03  28107.19
28098.88 28107.49

$se
Time Series:
Start = 2385
End = 2408
Frequency = 1
 [1]  287.9037  403.4785  497.3360  575.4604  647.3992  711.4318
772.5992
 [8]  828.5858  882.9576  933.5015  983.0265 1029.5283 1075.3362
1118.6557
[15] 1161.4748 1202.1888 1242.5250 1281.0454 1319.2698 1355.9056
1392.3018
[22] 1427.2929 1462.0847 1495.6231


>  lb <- pred$pred -1.96*pred$se[19]
> ub <- pred$pred +1.96*pred$se
> ts.plot(serie4b, pred$pred, lb, ub, lty=c(1, 1, 2, 2), col=c(1,
2, 4, 4), lwd=c(2, 1, 1, 1))
```

19 Intervalli di confidenza per una previsione del 95%.




```
>  kurtosis(arima312$residuals)
[1] 6.287412

> arch5b <- garch(residuals(arima312), order = c(0, 5))
> plot(arch5b)
```

arch(5) arima312

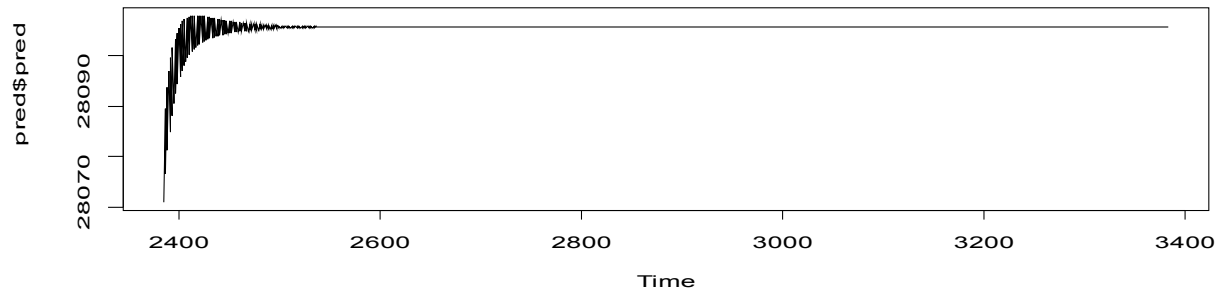


Ciò che ci chiediamo è se predict() incameri, nel suo output, la caratteristica di autocorrelazione quadratica dei residui del modello su cui poggia. Sarebbe opportuno lo studio attraverso un esperimento Monte Carlo.

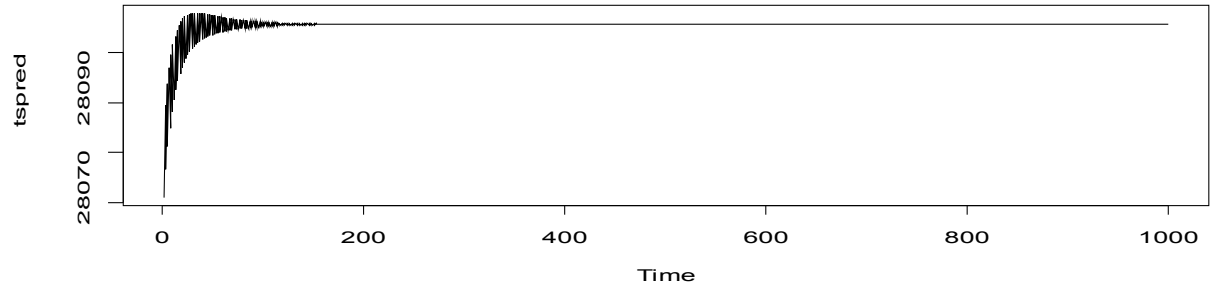
Procediamo empiricamente riutilizzando la funzione su un orizzonte

"lungo", incrementando cioè la distanza delle proiezioni:

```
> predict(arima312, n.ahead=1000)

$pred
Time Series:
Start = 2385
End = 3384
Frequency = 1
   [1] 28070.90 28089.51 28076.63 28093.68 28081.19 28096.99
28084.93 28099.60
   [9] 28088.00 28101.66 28090.53 28103.27 28092.63 28104.52
28094.36 28105.49
  [17] 28095.81 28106.23 28097.02 28106.78 28098.03 28107.19
28098.88 28107.49
  [25] 28099.61 28107.70 28100.22 28107.83 28100.75 28107.91
28101.21 28107.95

...

 [993] 28105.65 28105.65 28105.65 28105.65 28105.65 28105.65
28105.65 28105.65

> plot(pred$pred)
```

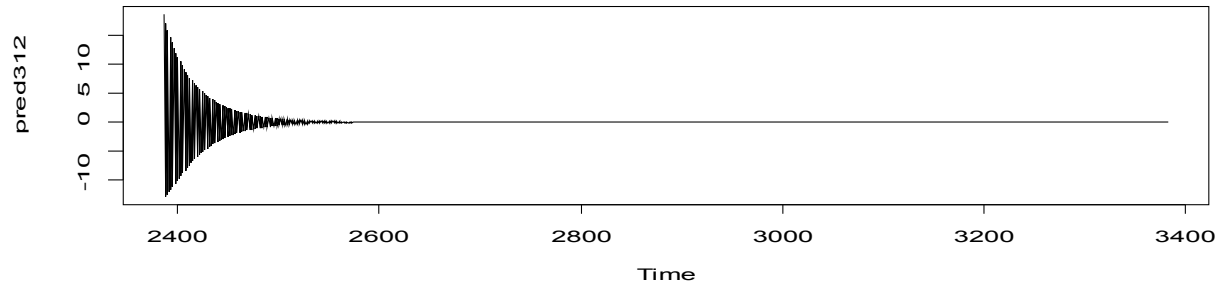


La serie è strana, con un trend ed una varianza rilevante fino alla proiezione 200 circa, dopo di ché si appiattisce sul valore 28105.65.



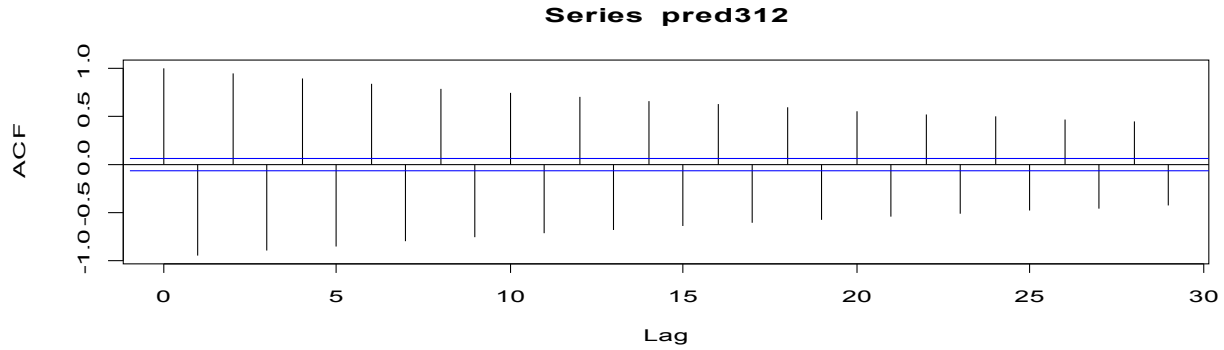
La media del processo serie4b è 24625.26.
Proviamo a differenziarla

```
> pred312 <- diff(pred$pred)
> plot(pred312)
```

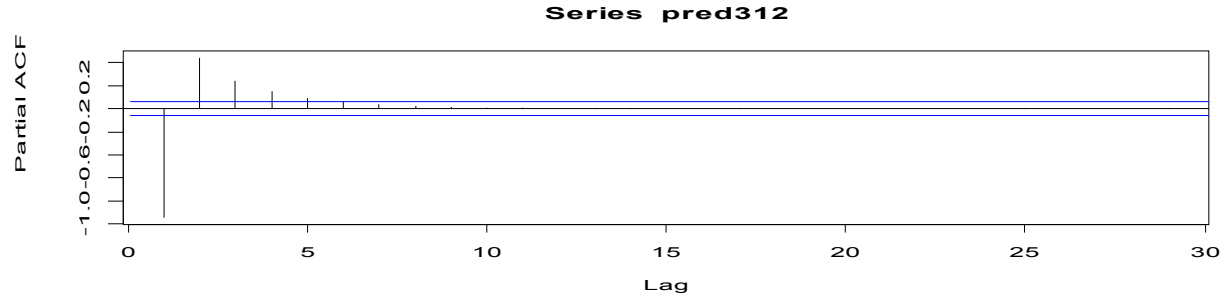


Si tratta evidentemente di una serie convergente: è come se l'informazione incamerata nel processo, argomento di predict(), producesse una "considerazione dell'informazione" del processo fino alla duecentesima proiezione e la varianza diminuisse "esaurendosi".

```
>  acf(pred312)
```




```
>  pacf(pred312)
```



La pacf ci suggerisce un ritardo 5. Le serie è stazionaria

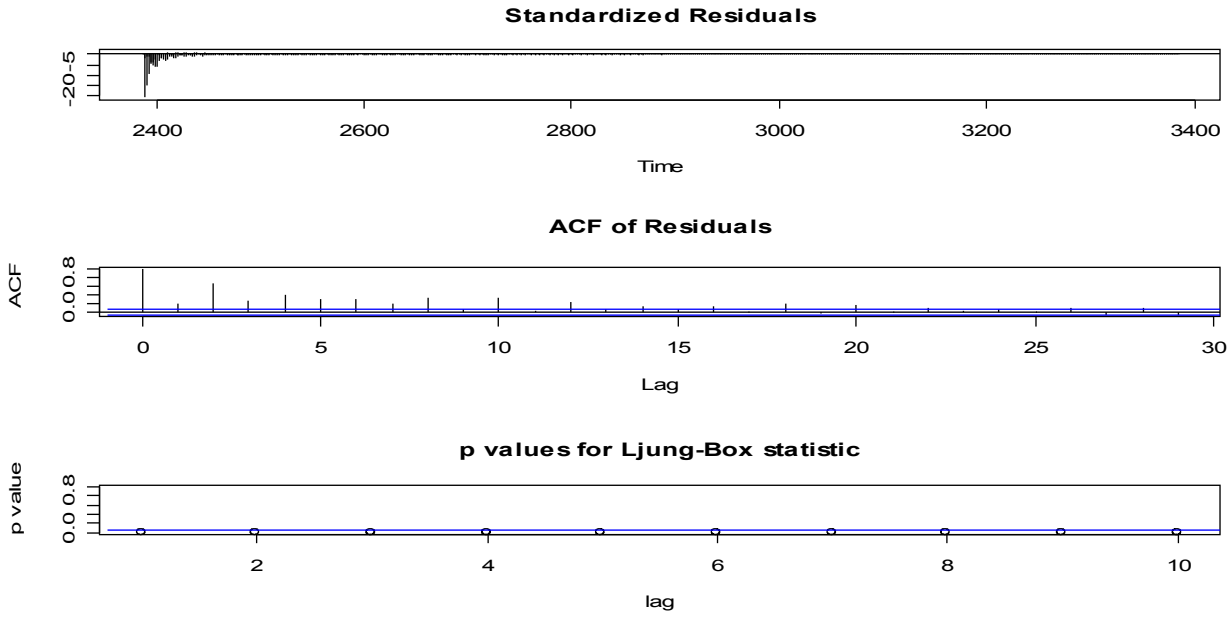
```
>  adf.test(pred312)

        Augmented Dickey-Fuller Test

data:  pred312
Dickey-Fuller = -38574566, Lag order = 9, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

ma se facciamo una stima, R ci fornisce il seguente output

```
>  ar5 <- arima(pred312, c(5, 0, 0))
Errore in optim(init[mask], armafn, method = "BFGS", hessian =
TRUE, control = optim.control,  :
  non-finite finite-difference value [2]
```

Purtroppo il modello non viene omologato.
Se proviamo a stimare la serie tenendo a mente il processo da cui l'abbiamo ottenuta la situazione è la seguente

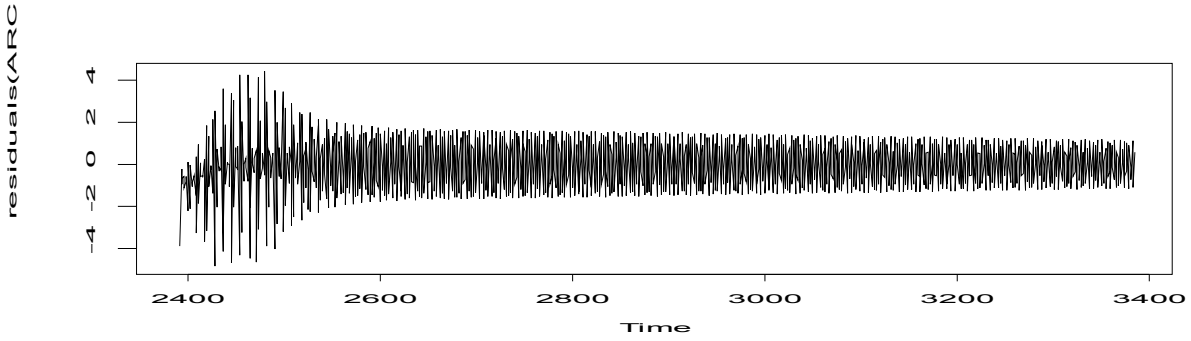
```
> ARIMA312<- arima(pred312, c(3, 0, 2))
> ARIMA312

Call:
arima(x = pred312, order = c(3, 0, 2))

Coefficients:
          ar1  ar2     ar3     ma1     ma2  intercept
      -0.9999    1  0.9999  1.5328  1.0000     0.0746
s.e.   0.0002    0  0.0002  0.0268  0.0044  1405.5559

sigma^2 estimated as 0.000713:  log likelihood = 2190.82,  aic = -
4367.65
> tsdiag(ARIMA312)
```

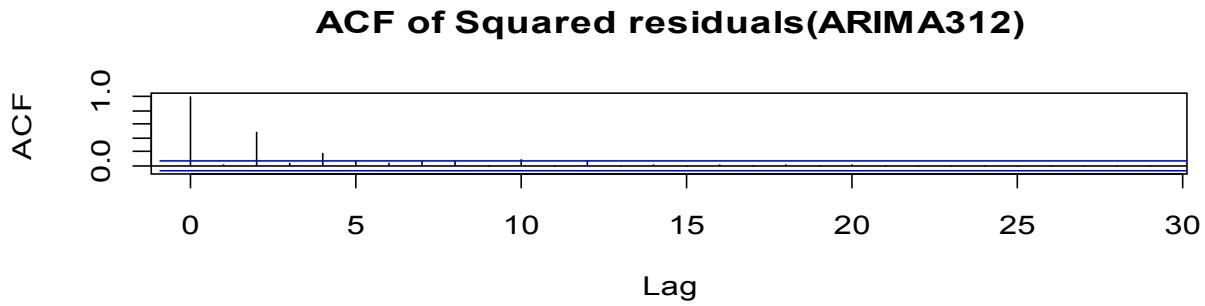


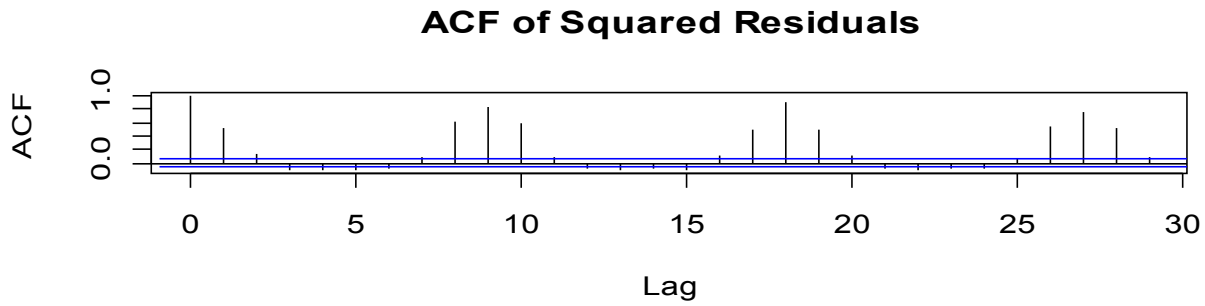
```
> ARCH5 <- garch(residuals(ARIMA312), order = c(0, 5))

 ***** ESTIMATION WITH ANALYTICAL GRADIENT *****

> summary(ARCH5)

Call:
garch(x = residuals(ARIMA312), order = c(0, 5))

Model:
GARCH(0,5)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.84056 -1.13679 -0.07143  1.11823  4.40174

Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 2.169e-07   5.274e-08    4.112 3.92e-05 ***
a1 8.034e-02   4.589e-03   17.508  < 2e-16 ***
a2 3.545e-02   4.759e-03    7.449 9.39e-14 ***
a3 3.112e-11   1.270e-02 2.45e-09        1
a4 2.145e-01   2.117e-02   10.133  < 2e-16 ***
a5 9.518e-02   8.648e-03   11.006  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Diagnostic Tests:
        Jarque Bera Test

data:  Residuals
X-squared = 5.2635, df = 2, p-value = 0.07195


        Box-Ljung test

data:  Squared.Residuals
X-squared = 271.2324, df = 1, p-value < 2.2e-16
```

Possiamo sempre ottenere una sintesi diagnostica con il comando

```
> plot(ARCH5)
```







I residui si distribuiscono a cono, anche se con maggiore uniformità rispetto a WN e l'ACF ci suggerisce un andamento periodico.
Le previsioni per un orizzonte finito, per la classe di modelli .Arima, sono utilizzate via KalmanForecast[20]. Queste sono statisticamente efficienti solo se la componente MA della previsione è invertibile, così che predict.Arima darà un warning per un modello MA non invertibile. Il filtro di Kalman ha un campo di applicazioni molto vasto, tra cui vi è anche la previsione dello stato (e quindi dell'uscita) di processi stocastici[21].

Gli standard errors di una previsione escludono l'incertezza nella stima di un modello ARMA ed i coefficienti della regressione. L'effetto è minimo. (Harvey 1993, pp. 58–9)

Queste funzioni lavorano con un modello a spazi di stato univariati con un vettore di stato **a**, transizioni **a <- T a + R e**, **e ~ N(0, kappa Q)** ed equazione delle osservazioni **y = Z'a + eta**, **eta ~ N(0, kappa h)**. Le verosomiglianza è un profilo di verosomiglianza dopo la stima di kappa.
Il modello è specificato come una lista con al minimo le seguenti componenti

T matrice di transizione
Z coefficienti delle osservazioni
h varianza delle osservazioni
V RQR'
a la stima di stato corrente
P la stima corrente della matrice di stato dell'incertezza
Pn la stima in t-1 della matrice di stato dell'incertezza

20 http://www.biostat.jhsph.edu/~qli/biostatistics_r_doc/library/stats/html/predict.html
21 Per quanto riguarda il filtro di Kalman cfr. http://it.wikipedia.org/wiki/Filtro_di_Kalman e appendice.

Più compatto è il codice garchFit per la stima e la previsione del modello $y=C+\epsilon;\quad \sigma_t^2=\alpha_0+\delta_1\sigma_{t-1}^2+...+\delta_p\sigma_{t-p}^2+\alpha_1\epsilon_t^2+...+\alpha_q\epsilon_{t-q}^2$

```
> fit <- garchFit( ~ arma(3, 2) + garch(5, 0), serie4)
Series Initialization:
 ARMA Model:                 arma
 Formula Mean:               ~ arma(3, 2)
 GARCH Model:                garch
 Formula Variance:           ~ garch(5, 0)
 ARMA Order:                 3 2
 Max ARMA Order:             3
 GARCH Order:                5 0
 Max GARCH Order:            5
 Maximum Order:              5
 Conditional Dist:           norm
 h.start:                    6
 llh.start:                  1
 Length of Series:           2383
 Recursion Init:             mci
 Series Scale:               288.7353

Parameter Initialization: ...
 --- END OF TRACE ---

> predict(fit, n.ahead=10)
   meanForecast meanError standardDeviation
1    -11.126138  288.6975          611.8576
2     32.431325  288.8581          616.3920
3     13.029798  289.1046          594.7094
4     11.406528  289.1640          616.0033
5      1.770734  289.2100          599.7763
6      3.071701  289.2222          588.3133
7     -3.799100  289.2353          583.9044
8     -1.022184  289.2372          579.8462
9     -6.447223  289.2415          575.1669
10    -3.066841  289.2416          567.5258
```

Per quanto riguarda l'orientamento previsionale in merito al comportamento di un titolo od un gruppo di titoli è utile riferirsi anche a delle simulazioni. Una breve digressione: per **simulazione**[22] si intende un modello della realtà che consente di valutare e prevedere lo svolgersi dinamico di una serie di eventi susseguenti all'imposizione di certe condizioni da parte dell'analista o dell'utente. Le simulazioni sono uno strumento sperimentale molto potente e si avvalgono delle possibilità di calcolo offerte dall'informatica; la simulazione, infatti, non è altro che la trasposizione in termini logico-matematici procedurali di un "modello concettuale" della realtà; tale modello concettuale può essere definito come l'insieme di processi che

22 Per un approfondimento sul vasto campo delle simulazioni in economia vedere Terna 2003

hanno luogo nel sistema valutato e il cui insieme permette di comprendere le logiche di funzionamento del sistema stesso.
Di seguito prendiamo in considerazione il pacchetto **"mgarchBEKK"** sviluppato da Harald Schmidbauer ed Vebhi Sinan Tunalioglu liberamente scaricabile dal sito http://www.hs-stat.com o da http://www.vsthost.com. Si tratta di un implementazione in R per la stima di modelli MGARCH versione BEKK[23], utilissimo per osservare il comportamento interattivo nella varianza-covarianza dei residui di due serie di riferimento. In particolare ci interesserà mettere a confronto la serie di un indice di mercato con quella dei prezzi di un titolo azionario, stimando un VAR bivariato con residui MGARCH e generare una simulazione.
Prendiamo in considerazione una serie storica bivariata $Z_t=(X_t,Y_t)'$. L'analoga specificazione in media condizionale è $Z_t=M_T+\epsilon_t$ dove M_t è la media condizionale bivariata di Z_t, E(X_t | $\mathcal{F}_{t-1}$)= M_t; M_t può essere un VAR od un VECM, se X_t ed Y_t sono cointegrati. Ci sono alcune possibilità per definire un corrispettivo della definizione dei processi GARCH per i termini d'errore a più di una dimensione. Una implementazione in un modello MGARCH-BEKK in cui $\epsilon=(\epsilon_{1t},\epsilon_{2t})'$ segue le equazioni

$$\epsilon=H_t^{1/2}*v_T,\quad H_t=C'C+\sum_{i=1}^{q}A'_i\epsilon_{t-i}\epsilon'_{t-i}A_i+\sum_{j=i}^{p}B'_jH_{t-j}B_j$$

con parametri delle matrici

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix},\quad A_i=\begin{pmatrix}a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)}\\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)}\end{pmatrix},\quad B_j=\begin{pmatrix}b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)}\\ b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)}\end{pmatrix},$$

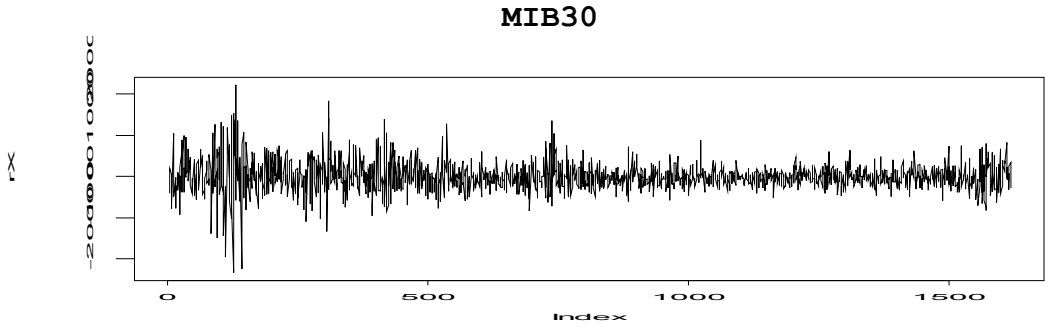
e v_T è un WN bivariato con matrice var-cov $cov(v)=I_2$. Questo modello sarà chiamato un MGARCH-BEKK di ordine (p,q). Questo comporta che la covarianza cov(Z_t | $\mathcal{F}_{t-1}$)= H_t; con H_t matrice di covarianza condizionale di Z_t date le informazioni circa il processo fino a t-1.
Un vantaggio dell'implementazione BEKK è la semplicità della struttura del modello, uno svantaggio è la non immediata interpretabilità dei parametri.

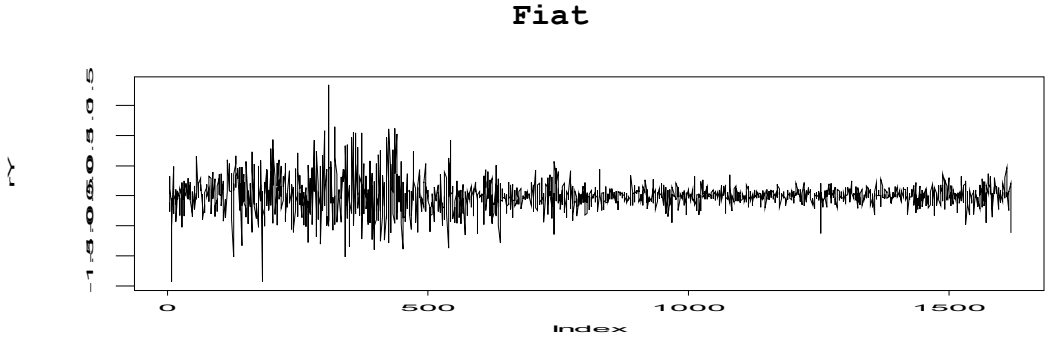
Teorema – L'MGARCH-BEKK è stazionario in covarianza se gli autovalori di $\sum_{i=1}^{q}(A_i\otimes A_i)'+\sum_{1}^{p}(B_i\otimes B_i)'$ [24]sono minori di uno in modulo.
In questo caso la matrice di covarianza non condizionale è data da

$$\text{vec}(\ \Sigma\ )=\left[I_4-\sum_{i=1}^{q}(A_i\otimes A_i)'-\sum_{1}^{p}(B_i\otimes B_i)'\right]^{-1}\ \text{vec(C'C)}^{[25]}.$$

23 BEKK è l'acronimo di Baba, Engle, Kraft e Kroner.
24 Il simbolo ⊗ denota il prodotto di Kronecker. Per maggiori informazioni vedere Baggio 2003.
25 vec(.) è l'operatore che stacca le colonne da matrice a vettore.

```
> dati <- read.csv("C:\\R\\fiat.csv", header = TRUE, sep = ",",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1] "Date"      "Open"      "High"      "Low"       "CloseFiat"
"Volume"
[7] "Adj.Close"
> Y <- CloseFiat
> dati2 <- read.csv("C:\\R\\MIB30.csv", header = TRUE, sep = ",",
na.string = " ")
> attach(dati2)
> names(dati2)
[1] "Date"       "Open"       "High"       "Low"
"CloseMIB30"
[6] "Volume"     "Adj.Close"
> X <- CloseMIB30
> rY <- diff(Y)
> rX <- diff(X)

> summary(rX)
     Min.   1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
-2339.000  -178.000   -14.000     4.177   155.000  2217.000

> summary(rY)
     Min.   1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
-1.440000 -0.110000  0.000000  0.001132  0.100000  1.840000
```





Abbiamo caricato i dati dell'indice MIB30 e delle azioni Fiat ne abbiamo calcolato le differenze prime in modo da ottenere due serie stazionarie (processi I(1)), ed abbiamo riportato i due grafici. Ora proviamo a stimare un VAR(1) con il pacchetto **"mAr"**

Modello

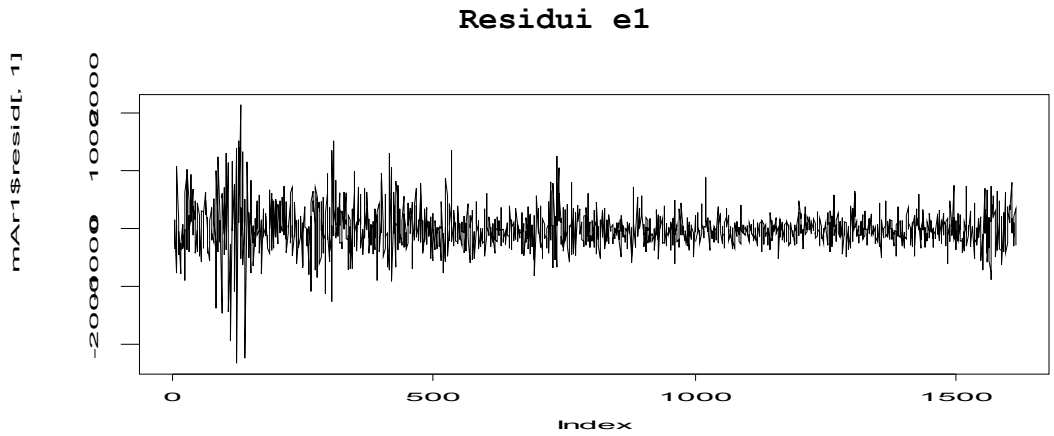
$$\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

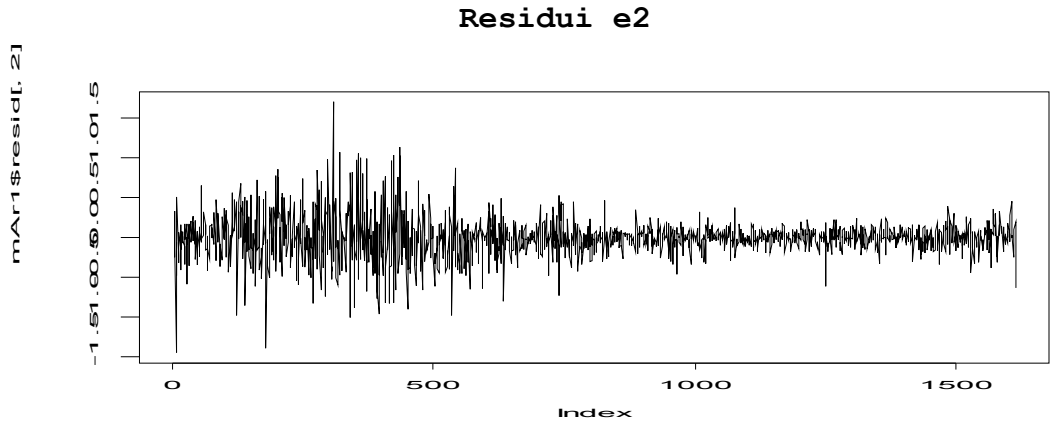
```
> M <- cbind(rX, rY)
> mAr1 <- mAr.est(M, 1)
$SBC
[1] 4.492388

$wHat
[1] 4.5179129413 0.0009550768

$AHat
              [,1]         [,2]
[1,] -0.0739551912 157.39725617
[2,]  0.0000749669  -0.05350864

$CHat
              [,1]         [,2]
[1,] 123603.10209 18.09621109
[2,]     18.09621  0.06570308

$resid
              [,1]          [,2]
[1,]  -353.5997983 -2.460296e-01
[2,]   115.1304020  3.297865e-01

...

[1615,]   345.5093458  1.944986e-01
[1616,]  -296.2047062 -6.354319e-01
```

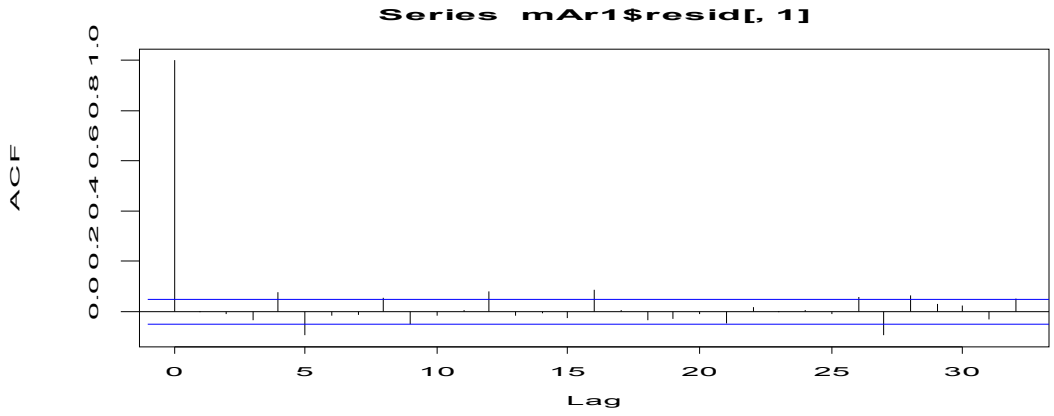
Elenco delle componenti del mAr:
SBC Schwartz Bayesian Criterion;
wHat vector of intercept terms;
AHat matrix of estimated autoregression coefficients for the fitted model;
CHat noise covariance matrix;
resid residuals from the fitted model.

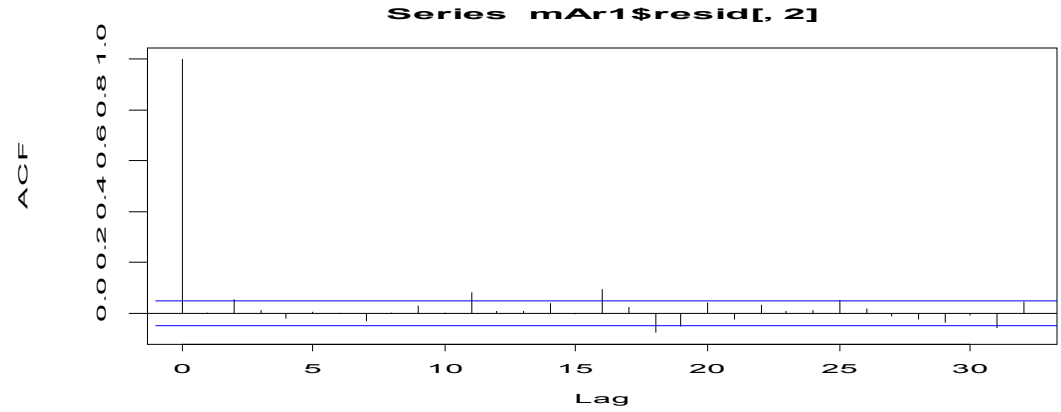
```
> cor(mAr1$resid[,1], mAr1$resid[,2])
[1] 0.2008076
```

Abbiamo stimato le componenti di un VAR(1) i cui residui risultano essere linearmente, e positivamente, correlati (0.20): questo si evince anche dai grafici seguenti. Non solo: sussiste una evidente correlazione quadratica nelle singole serie. Proveremo ad identificare e stimare un modello di eteroschedasticità condizionale generalizzata multivariata (MGARCH) in particolare con un modello BEKK attraverso la funzione **mvBEKK()**.


Residui e1
mAr1$resid[, 1]
Index


Residui e2
mAr1$resid[, 2]
Index


Series mAr1$resid[, 1]
ACF
Lag

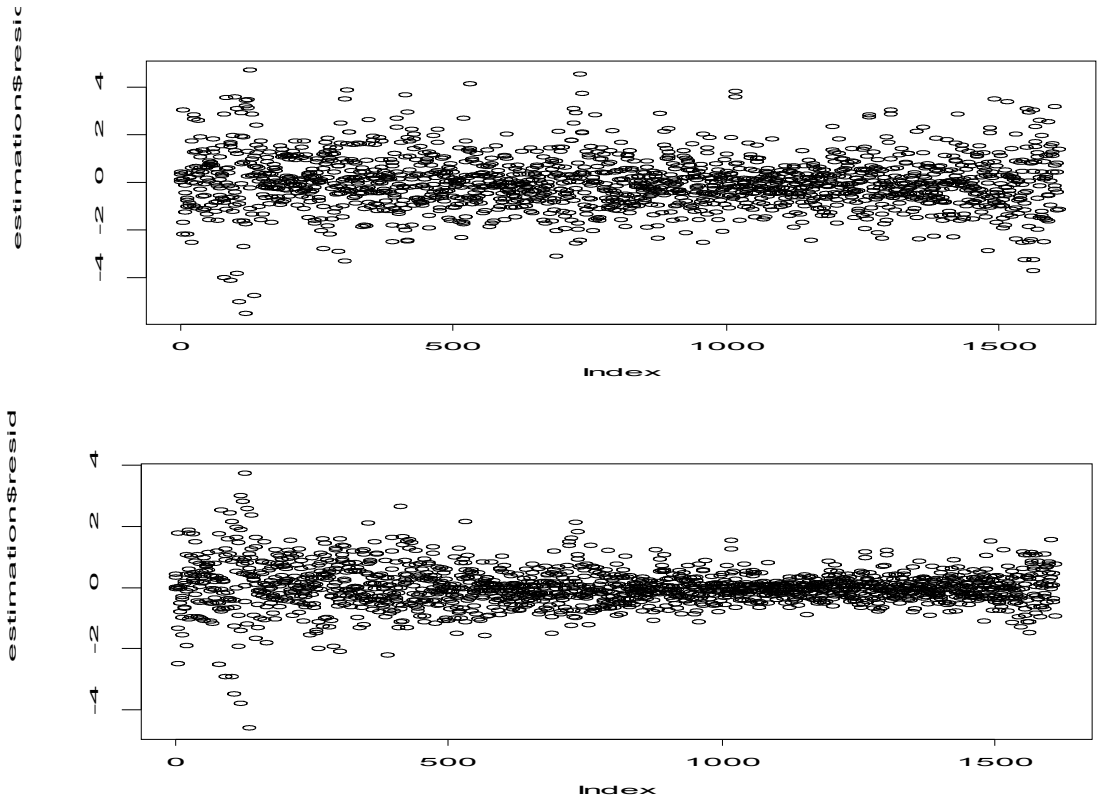

Series mAr1$resid[, 2]
ACF
Lag

```
> Box.test(mAr1$resid[,1]^2, lag = 1, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  mAr1$resid[, 1]^2
X-squared = 56.1477, df = 1, p-value = 6.728e-14

> Box.test(mAr1$resid[,2]^2, lag = 1, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  mAr1$resid[, 2]^2
X-squared = 45.1393, df = 1, p-value = 1.835e-11
```

Procederemo per tentativi sui residui (e1, e2) con **MGARCH(p, q)** di diversi valori (p=1, q=1; p=2, q=1; p=1, q=2; p=2, q=2) tenendo presente che il **target** è sempre un comportamento WN dei residui.

```
> e1 <- mAr1$resid[,1]
> e2 <- mAr1$resid[,2]
> library(mgarchBEKK)
> eps <- data.frame(e1, e2)
> est.model1 <- mvBEKK.est(eps, order = c(1,1))
> mvBEKK.diag(est.model1)

        Number of estimated series :  2
        Length of estimated series :  1616
        Estimation Time            :  8.718
        Total Time                 :  11.718
        BEKK order                 :  1 1
        Eigenvalues                :  29.04117 0.9846174 0.2494196
0.03109334
        aic                        :  14474.7
          unconditional cov. matrix   :  6020.731 40950.2 40950.2
-51208.8
        var(resid 1 )                 :  1.231664
        mean(resid 1 )                :  -0.02462718
        var(resid 2 )                 :  0.4163872
        mean(resid 2 )                :  -0.005140455
        Estimated parameters       :

        C estimates:
         [,1]     [,2]
[1,] 6.759855 1.078574
[2,] 0.000000 0.654664

        ARCH estimates:
            [,1]          [,2]
[1,] -0.05580296  8.526034e-05
[2,]  0.63665696 -1.863642e+00
```

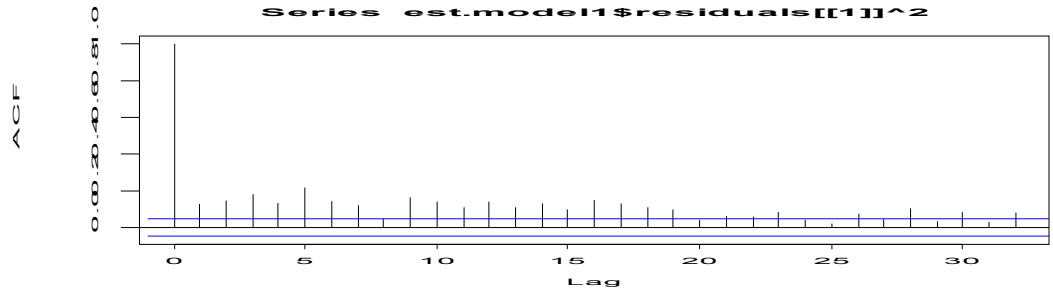
```
        GARCH estimates:
          [,1]         [,2]
[1,] 1.009350 -0.002140385
[2,] 5.238442  0.133021072

        asy.se.coef                :

        C estimates, standard errors:
          [,1]       [,2]
[1,] 1.357149 0.07201506
[2,] 0.000000 0.05636387



        ARCH estimates, standard errors:
             [,1]         [,2]
[1,] 0.003459109 0.0002247873
[2,] 3.457277380 0.2099062189

        GARCH estimates, standard errors:
              [,1]         [,2]
[1,] 0.0001193958 1.863202e-05
[2,] 0.3596672007 2.745937e-02
Called from: mvBEKK.diag(est.model1)
```



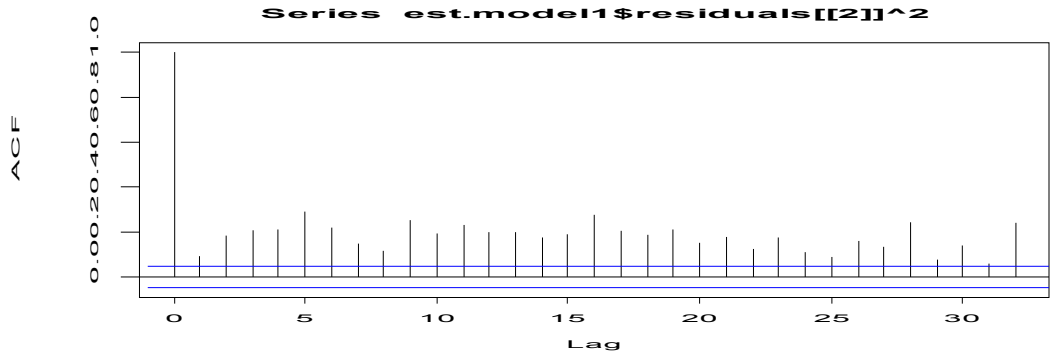
I grafici dei residui mostrano una certa eccentricità persistente e le acf quadratiche rilevano autocorrelazione marcata. Dobbiamo provare ad incrementare i parametri del modello fino a far

scomparire l'eccentricità e posizionare i valori all'interno dell'intervallo di soglia. Procediamo empiricamente fino ad identificare il modello pertinente.

```
> acf(est.model1$residuals[[1]]^2)
```




```
> acf(est.model1$residuals[[2]]^2)
```



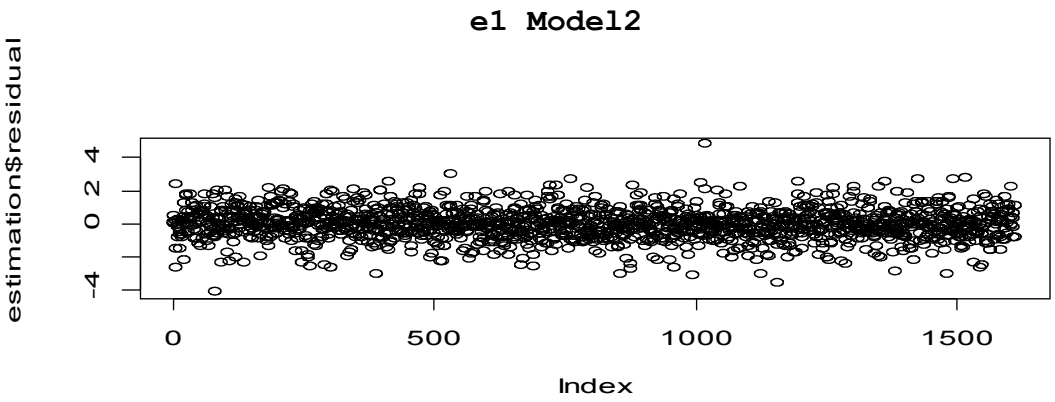
Dopo varie prove stabiliamo che il nostro modello è un MGARCH(2, 2), infatti

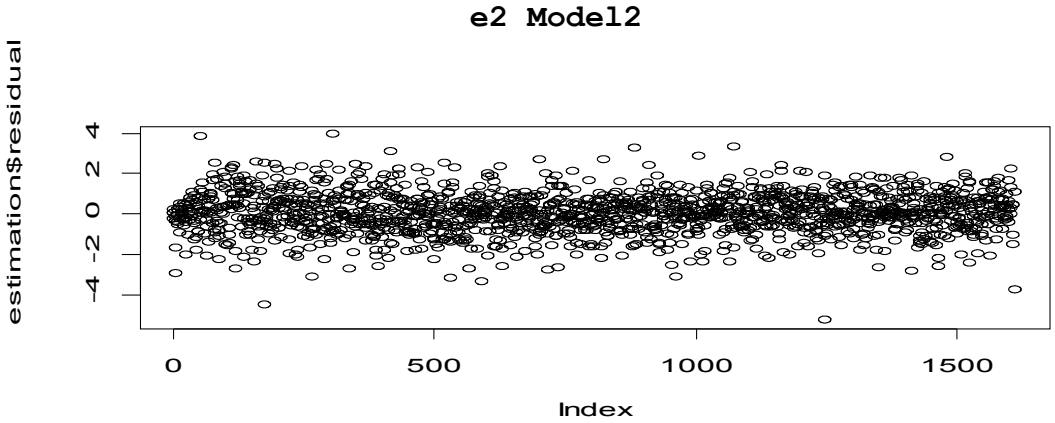
```
> mvBEKK.diag(est.model2)
        Number of estimated series :  2
        Length of estimated series :  1616
        Estimation Time            :  18.812
        Total Time                 :  21.844
        BEKK order                 :  2 1
         Eigenvalues               :  8.273895 0.8420935 0.5317851
0.07916421
        aic                        :  11200.42
         unconditional cov. matrix  :  -83.2492 -43.98079 -43.98079
-73906.61
        var(resid 1 )                :  0.8712778
        mean(resid 1 )               :  -0.07463218
        var(resid 2 )                :  1.009992
        mean(resid 2 )               :  0.0005242297
        Estimated parameters       :

        C estimates:
          [,1]        [,2]
[1,] 1.998768 0.007046191
[2,] 0.000000 0.012992912
```

```
        ARCH estimates:
          [,1]          [,2]
[1,] 0.4285642 -2.846599e-05
[2,] 2.7891747  3.184329e-01

        GARCH estimates:
           [,1]          [,2]
[1,]  0.9222222  0.0001739905
[2,] -0.2608787 -0.7898981508
          [,1]          [,2]
[1,] 0.1168257 -7.913651e-05
[2,] 0.1796875  5.141723e-01

        asy.se.coef               :

        C estimates, standard errors:
         [,1]        [,2]
[1,] 3.730784 0.009270040
[2,] 0.000000 0.006313299

        ARCH estimates, standard errors:
            [,1]         [,2]
[1,]  0.03650035 2.812648e-05
[2,] 26.17426579 3.957491e-02

        GARCH estimates, standard errors:
           [,1]         [,2]
[1,] 0.01041468 1.733082e-05
[2,] 4.74879120 4.778849e-02
           [,1]         [,2]
[1,] 0.03961937 2.171616e-05
[2,] 5.05737127 6.053063e-02

> mvBEKK.diag(est.model3)
        Number of estimated series :  2
        Length of estimated series :  1616
        Estimation Time            :  15.297
        Total Time                 :  19.515
        BEKK order                 :  1 2
        Eigenvalues                :  43.12101 0.8868964 0.5390593
0.03291331
        aic                        :  11255.13
            unconditional cov. matrix   :   -0.3440506 -0.4554747
-0.4554747 -73.19907
        var(resid 1 )              :  0.8541189
        mean(resid 1 )             :  -0.06031214
        var(resid 2 )              :  1.212811
        mean(resid 2 )             :  -0.02332401
        Estimated parameters       :
```

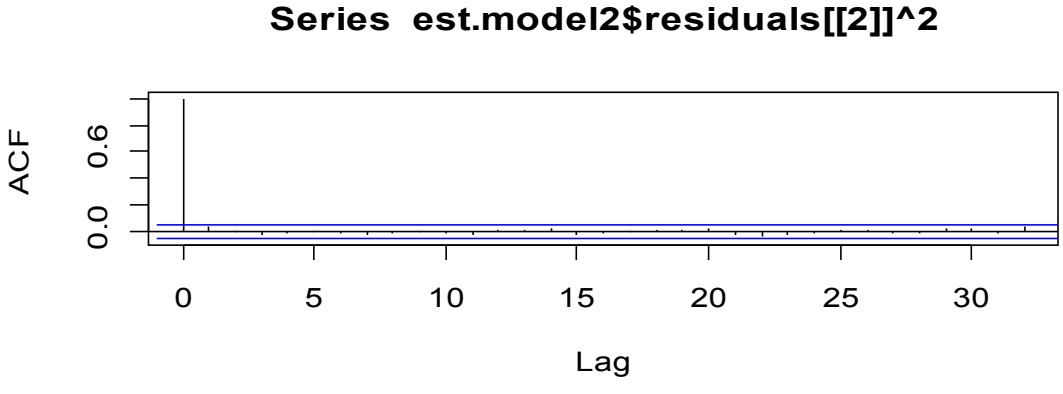
```
C estimates:
           [,1]        [,2]
[1,] 0.09837889 0.049639378
[2,] 0.00000000 0.007446626

        ARCH estimates:
          [,1]          [,2]
[1,] 0.1281864 -0.0001454767
[2,] 5.8415726 -0.3220504992
          [,1]          [,2]
[1,] 0.3184986  5.128491e-05
[2,] 2.7749111 -1.166880e-01


 GARCH estimates:
          [,1]          [,2]
[1,] 0.9537991  0.0002047402
[2,] 0.9532104 -0.8481463962

        asy.se.coef               :

        C estimates, standard errors:
         [,1]        [,2]
[1,] 37.87906 0.008188503
[2,]  0.00000 0.008240020

        ARCH estimates, standard errors:
             [,1]          [,2]
[1,]  0.01607141 3.055324e-05
[2,] 26.46276740 7.196833e-03
             [,1]          [,2]
[1,]  0.01888477 0.0000296361
[2,] 17.00502704 0.0226805576

        GARCH estimates, standard errors:
              [,1]          [,2]
[1,]  0.009343838 1.004715e-05
[2,] 74.287745458 2.215492e-02

> mvBEKK.diag(est.model4)
        Number of estimated series :  2
        Length of estimated series :  1616
        Estimation Time            :  26.125
        Total Time                 :  30.313
        BEKK order                 :  2 2
        Eigenvalues                :  76.59392 0.3966304 0.1563367
0.004841575
        aic                        :  11145.92
          unconditional cov. matrix   :  308367.2 1925246 1925246
346999546
```

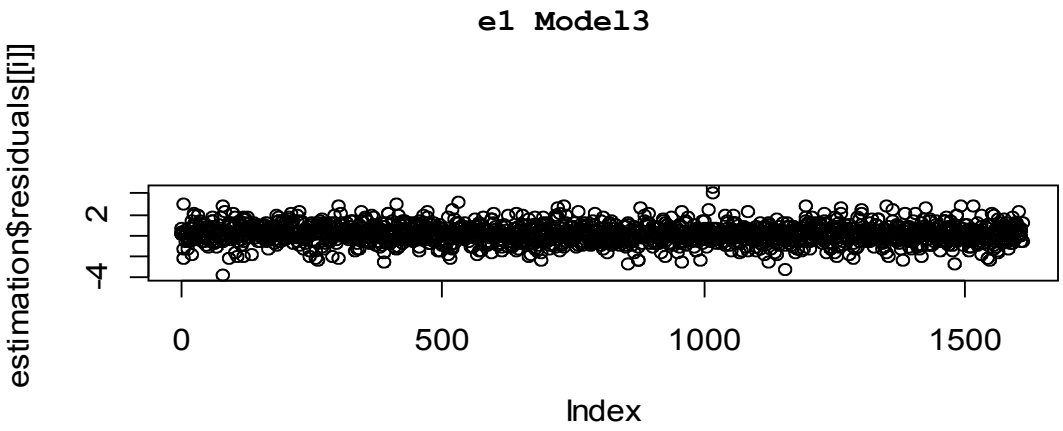
```
        var(resid 1 )                 :  0.9556665
        mean(resid 1 )                :  -0.05764405
        var(resid 2 )                 :  1.038428
        mean(resid 2 )                :  -0.006424929
        Estimated parameters       :


        C estimates:
          [,1]        [,2]
[1,] -46.89117  0.01848805
[2,]   0.00000 -0.02497560


        ARCH estimates:
           [,1]          [,2]
[1,]  0.1557591 -2.811142e-05
[2,] -1.8218620  5.323381e-01
          [,1]         [,2]
[1,] 0.3590778 2.465554e-05
[2,] 7.7226759 6.315881e-02

        GARCH estimates:
          [,1]          [,2]
[1,] 0.5962865 -0.0000839016
[2,] 0.9372429  0.6529073234
         [,1]          [,2]
[1,] 0.694345  0.0002846048
[2,] 3.509797 -0.4859496184

        asy.se.coef                :

        C estimates, standard errors:
         [,1]       [,2]
[1,] 6.105583 0.01093073
[2,] 0.000000 0.01143951

        ARCH estimates, standard errors:
           [,1]         [,2]
[1,]  0.0064508 3.320835e-05
[2,] 47.6366758 6.049710e-02
           [,1]         [,2]
[1,] 0.02790672 2.609303e-05
[2,] 8.53229800 1.906768e-01

        GARCH estimates, standard errors:
           [,1]         [,2]
[1,] 0.03470419 8.645257e-06
[2,] 7.91588150 3.599933e-02
            [,1]         [,2]
[1,]  0.02927571 1.253925e-05
[2,] 11.82500970 3.730109e-02
```

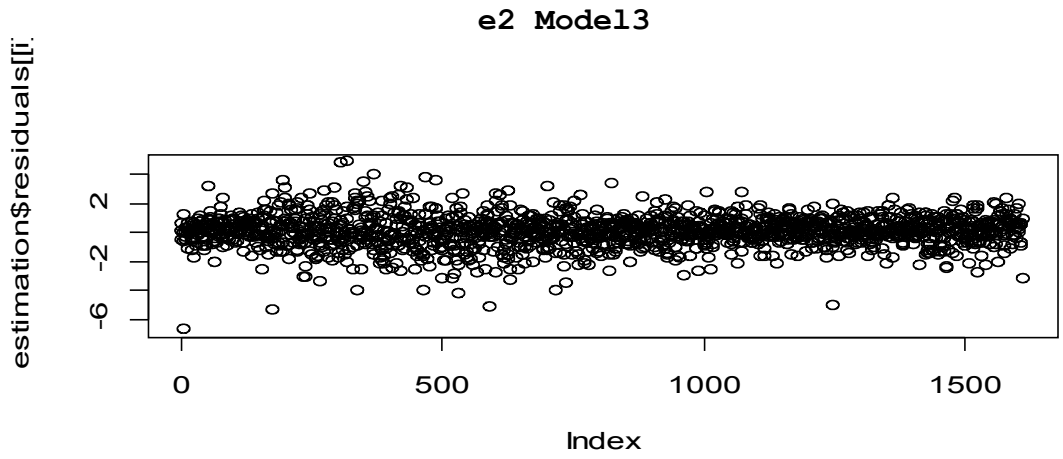

e1 Model2
estimation$residual
-4
0
2
4
0
500
1000
1500
Index

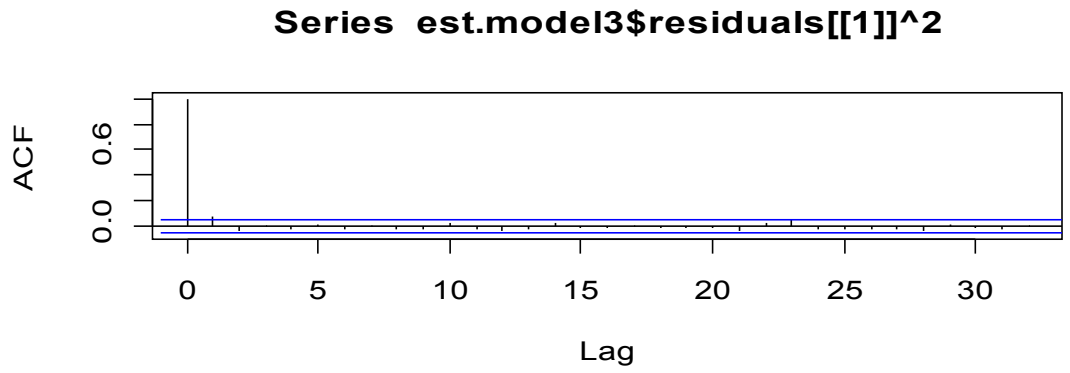

e2 Model2
estimation$residual
-4
-2
0
2
4
0
500
1000
1500
Index

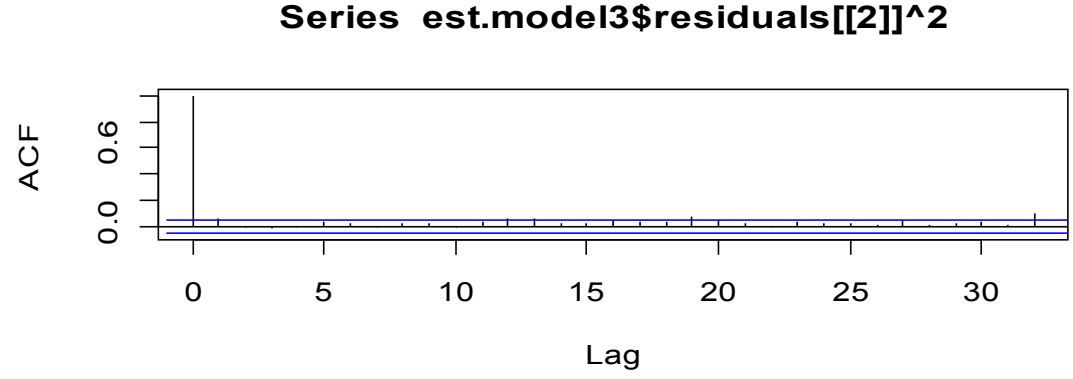
Series est.model2$residuals[[1]]^2
ACF
0.0
0.6
0
5
10
15
20
25
30
Lag

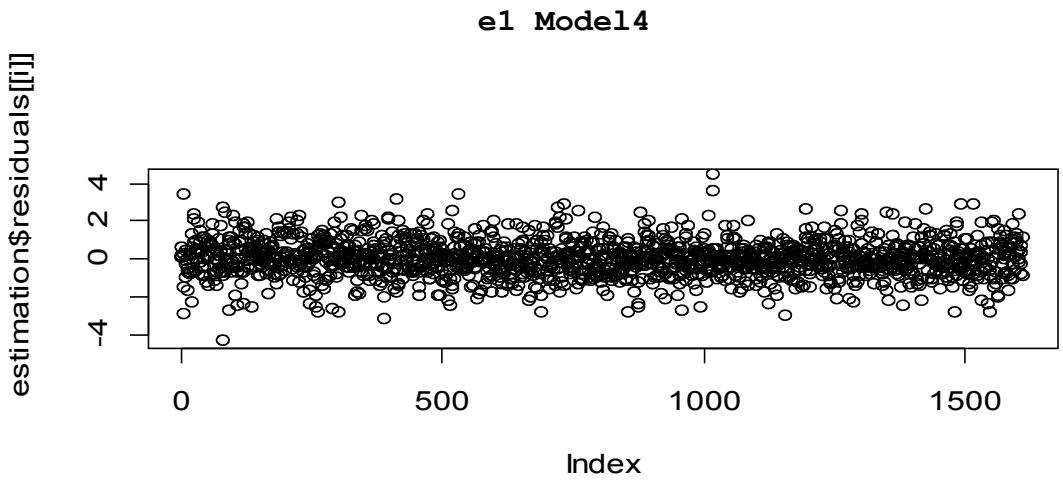

Series est.model2$residuals[[2]]^2
ACF
0.0
0.6
0
5
10
15
20
25
30
Lag

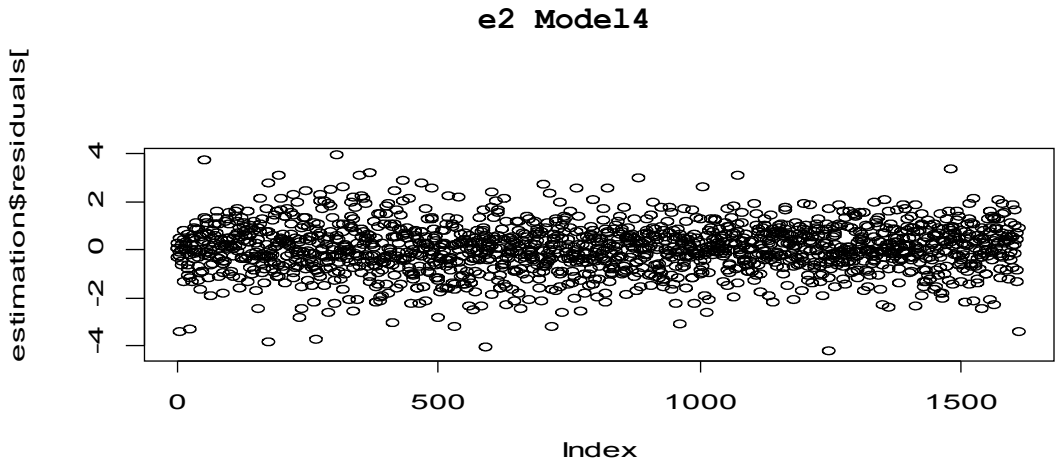

e1 Model3
estimation$residuals[[i]]
-4
2
0
500
1000
1500
Index

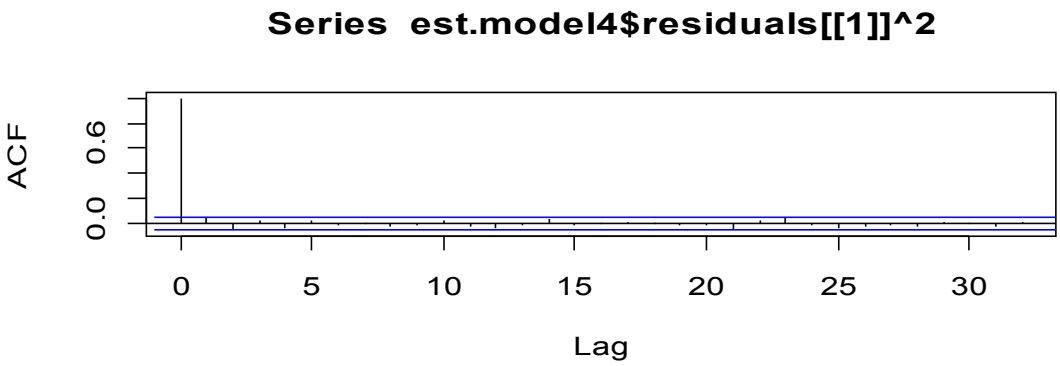

e2 Model3
estimation$residuals[[i
-6
-2
2
0
500
1000
1500
Index

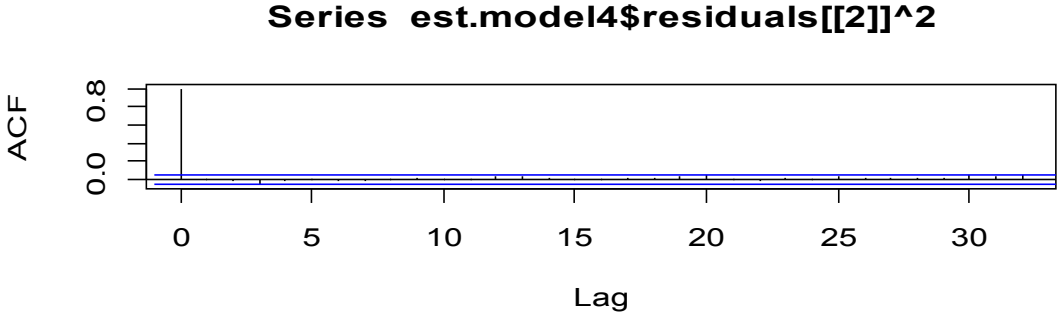

Series est.model3$residuals[[1]]^2
ACF
0.0
0.6
0
5
10
15
20
25
30
Lag


Series est.model3$residuals[[2]]^2
ACF
0.0
0.6
0
5
10
15
20
25
30
Lag


e1 Model4
estimation$residuals[[i]]
-4
0
2
4
0
500
1000
1500
Index


e2 Model4
estimation$residuals[
-4
-2
0
2
4
0
500
1000
1500
Index


Series est.model4$residuals[[1]]^2
ACF
0.0
0.6
0
5
10
15
20
25
30
Lag

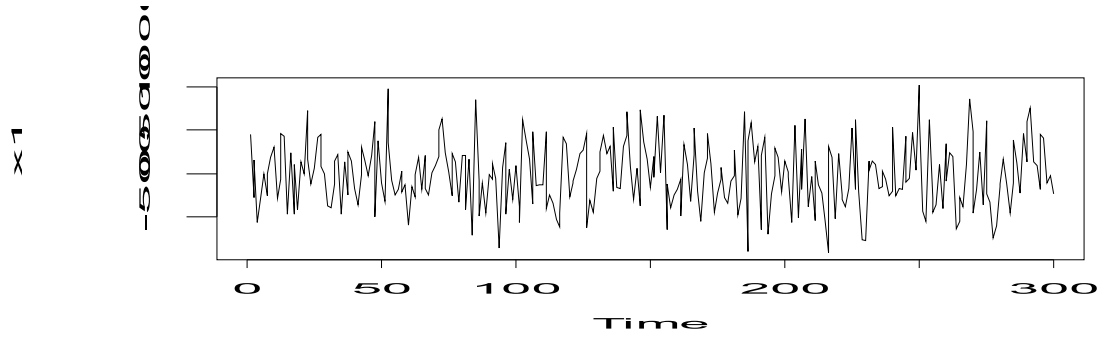

Series est.model4$residuals[[2]]^2
ACF
0.0
0.8
0
5
10
15
20
25
30
Lag

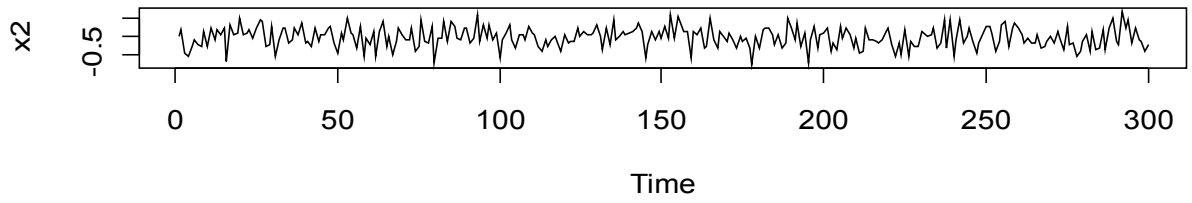
il secondo ed il quarto modello sembrano eliminare i problemi di autocorrelazione quadratica, distribuendo uniformemente (o più uniformemente) i residui ed hanno valori di AIC più bassi. In particolare il quarto modello sembra essere preferibile con l'AIC minore. Se diamo uno sguardo ai grafici, abbiamo una conferma visiva di come in entrambi il problema dell'autocorrelazione è quasi del tutto risolto. Graficamente il modello 2 sembra avere un ottimo adattamento. In questo caso si tratta di scegliere, e riferirsi all'AIC può non essere una cattiva idea.

Ora sfruttiamo i risultati ottenuti per generare una simulazione sui parametri stimati del VAR.

```
> W=c(4.5179129413,0.0009550768)
> C=rbind(c(123603.10209,18.09621109 ),c( 18.09621,0.06570308))

> A=rbind(c(-0.0739551912,157.39725617),c( 0.0000749669,-
0.05350864))
> x=mAr.sim(w,A,C,N=300)


$wHat
[1] 4.5179129413 0.0009550768       W

$AHat
              [,1]         [,2]
[1,] -0.0739551912 157.39725617     A
[2,]  0.0000749669  -0.05350864

$CHat
              [,1]         [,2]
[1,] 123603.10209 18.09621109       C
[2,]     18.09621  0.06570308

$resid
```

wHat vector of intercept terms;
AHat matrix of estimated autoregression coefficients for the fitted model;
CHat noise covariance matrix;
resid residuals from the fitted model.





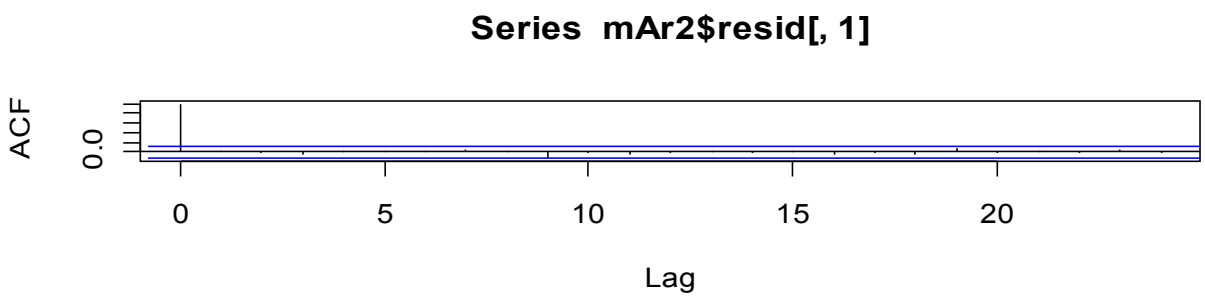
Se ristimiamo il modello simulato con lo stesso metodo ed andiamo ad osservarne i residui

```
> mAr2 <- mAr.est(x, 1)
$SBC
[1] 4.650328

$wHat
[1] -12.43113285  -0.01822297

$AHat
               [,1]         [,2]
[1,] -0.0007507620 94.68829818
[2,]  0.0001359952 -0.06932046

$CHat
             [,1]        [,2]
[1,] 136926.58878 19.88162870
[2,]     19.88163  0.07563392

$resid
                [,1]         [,2]
[1,] -261.1496055  0.146638220
[2,]  155.1246408 -0.377154391

...

[298,]    0.1150102 -0.401887326
[299,] -178.5470670 -0.209500165

> cor(mAr2$resid[,1], mAr2$resid[,2])
[1] 0.1953663

> Box.test(mAr2$resid[,1]^2, lag = 1, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  mAr2$resid[, 1]^2
X-squared = 2.8659, df = 1, p-value = 0.09048
```

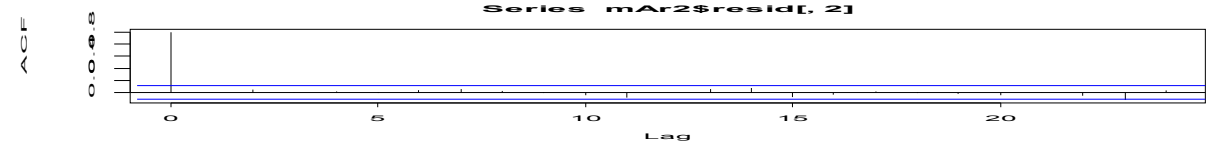
```
> Box.test(mAr2$resid[,2]^2, lag = 1, type = "Ljung-Box")

        Box-Ljung test

data:  mAr2$resid[, 2]^2
X-squared = 8.0709, df = 1, p-value = 0.004498
> acf(mAr2$resid[,1])
```

Notiamo che l'autocorrelazione è pressoché assente e l'autocorrelazione quadratica è rilevante solo per una delle serie, pur essendo le due correlate per uno 0.20. La simulazione mAr sembra non restituire le caratteristiche di autocorrelazione della serie originale: infatti simulazione e stime sono svolte in ls con e(t) vettore di termini noise non correlati con media 0 e matrice var-cov C. Per ottenere una simulazione efficiente dovremmo implementare il modello mAr1 in modo da ottenere residui WN.

```
> acf(mAr2$resid[,1])
```




```
> acf(mAr2$resid[,2])
```



Una operazione simile possiamo attuarla attraverso il pacchetto **"vars"**, per quanto concerne la stima ed i test di un modello

```
> VAR(M, p=1, type = c("none"))

VAR Estimation Results:
========================

Estimated coefficients for equation rX:
=======================================
Call:
rX = rX.l1 + rY.l1

       rX.l1        rY.l1
 -0.07380712 157.46278111
```

```
Estimated coefficients for equation rY:
=======================================
Call:
rY = rX.l1 + rY.l1

        rX.l1         rY.l1
 0.0000749982 -0.0534947918
```

In questo caso è disponibile la funzione predict() che opera su oggetti di classe **varest** generati da **VAR()** o da **vec2var()**, attraverso il metodo OLS, ottenendo le matrici per ricorsione.

```
> MU <- VAR(M, p=1, type = c("none"))
> predict(MU, n.ahead = 10, ci = 0.95, dumvar = NULL)
$rX
                fcst     lower    upper       CI
 [1,] -7.666570e+01 -765.5783 612.2469 688.9126
 [2,]  7.527129e+00 -686.6090 701.6633 694.1361
 [3,] -1.560897e+00 -695.8372 692.7154 694.2763
 [4,]  2.578769e-01 -694.0226 694.5384 694.2805
 [5,] -4.509864e-02 -694.3257 694.2355 694.2806
 [6,]  7.768346e-03 -694.2729 694.2884 694.2806
 [7,] -1.343451e-03 -694.2820 694.2793 694.2806
 [8,]  2.320919e-04 -694.2804 694.2809 694.2806
 [9,] -4.010679e-05 -694.2807 694.2806 694.2806
[10,]  6.930176e-06 -694.2806 694.2806 694.2806

$rY
                fcst      lower     upper        CI
 [1,]  1.186728e-02 -0.4903705 0.5141051 0.5022378
 [2,] -6.384628e-03 -0.5114357 0.4986664 0.5050510
 [3,]  9.060655e-04 -0.5042223 0.5060344 0.5051283
 [4,] -1.655343e-04 -0.5052962 0.5049651 0.5051306
 [5,]  2.819553e-05 -0.5051025 0.5051589 0.5051307
 [6,] -4.890631e-06 -0.5051356 0.5051258 0.5051307
 [7,]  8.442353e-07 -0.5051298 0.5051315 0.5051307
 [8,] -1.459186e-07 -0.5051308 0.5051305 0.5051307
 [9,]  2.521236e-08 -0.5051307 0.5051307 0.5051307
[10,] -4.356667e-09 -0.5051307 0.5051307 0.5051307
```

Una breve applicazione per quanto concerne la proprietà descrittiva delle simulazioni introducendo il tema successivo: la seguente linea di codice produce un modello di cointegrazione tra due vettori; reiterando il codice la proprietà non cambia.

```
> library(MASS)
> sigma <- diag(0.5, 2)
> e <- mvrnorm(250, rep(0, 2), sigma)
> u.ar <- arima.sim(250, model = list(ar = c(0.5)), innov = e[,1])
> y2 <- cumsum(e[,2])
> y1 <- 0.5 * y2 + u.ar
```

>ts.plot(y1, y2, col=c(1, 3), main = "Simulazione di un sistema cointegrato bivariato", sub = "1 vettore di cointegrazione, 1 trend comune")[26]

3.5 Una analisi sull'integrazione dei mercati finanziari

"Negli ultimi due decenni (O.Blanchard 2000), la struttura dei mercati finanziari ha vissuto un notevole, sia pur lento, processo d'integrazione. Si è provveduto a smantellare i vincoli ai movimenti di capitale allo scopo di:

- **migliorare l'efficienza** dei mercati finanziari, incentivando la competizione tra attività nazionali ed estere;
- **ridurre i rischi** finanziari, permettendo agli investitori nazionali di diversificare i propri portafogli con investimenti all'estero.

I programmi di liberalizzazione dei capitali presero il via negli anni settanta. Iniziarono gli USA ed il Regno Unito, seguiti da Canada, Svizzera, Germania. Nella gran parte dei paesi europei la rimozione completa dei controlli valutari è stata completata solo alla fine degli anni novanta, in gran parte per le direttive della Commissione Europea.
Esiste un modo per quantificare il grado di integrazione finanziaria tra i paesi? Il metodo più semplice è osservare se il rendimento di un'attività è lo stesso indipendentemente dal mercato in cui essa è negoziata. Per esempio se indichiamo con **i$^A** il tasso nominale di un deposito in dollari con scadenza di un anno nel paese **A** e con **i$^B** il tasso offerto da un deposito con le stesse caratteristiche in **B**, allora la perfetta mobilità dei capitali implica che **i$^A = I$^B**, se no vi sarebbe un'opportunità di arbitraggio, che in assenza di controlli, non potrebbe permanere a lungo.

L'Euromercato, ossia il mercato in cui sono negoziati i depositi eurovalute non è soggetto alle regolamentazioni finanziarie nazionali. Quindi la differenza tra il rendimento di un deposito in dollari in una banca americana – chiamato **tasso on-shore** – ed il rendimento di un deposito sempre in dollari e con uguale maturità, ma negoziato nell'Euromercato – chiamato **tasso off-shore** segnala la presenza di profitti di arbitraggio che non possono essere sfruttati. Di conseguenza questo differenziale, se non è prossimo a zero, offre una misura della dimensione dei controlli ai movimenti di capitale.
La grandezza del differenziale tra i tassi on-shore ed off-shore è caratterizzata da una ampiezza cospicua sia positiva che negativa. Almeno per i paesi **Euro-zone** i mercati finanziari sono liberi dai controlli.
Purtroppo per la maggior parte dei **paesi in via di sviluppo** non

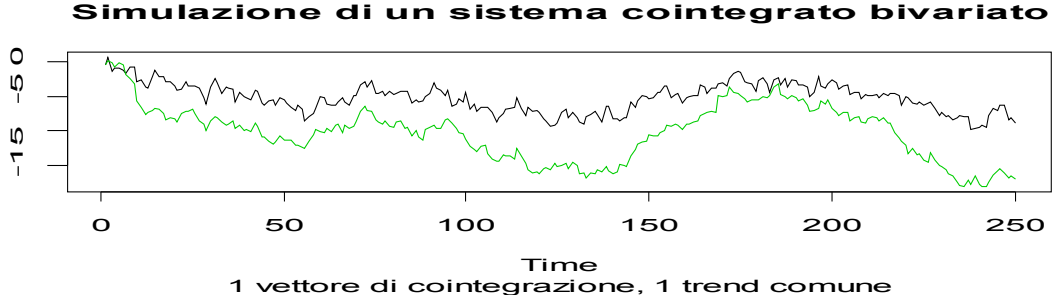
26 Output pg 112

esiste un Euromercato e quindi non è possibile fare un confronto tra tassi on-shore ed off-shore.
Durante la metà degli anni 80 l'indice dei controlli si è ridotto bruscamente. Contemporaneamente la minore regolamentazione di questi mercati finanziari ha favorito un notevole afflusso di risorse finanziarie dall'estero.
Oggi dunque l'ipotesi che i mercati siano perfettamente integrati non è più una ipotesi teorica".

Una caratteristica delle serie economiche finanziarie è quella di essere non stazionarie come si è accennato precedentemente. Per applicare l'approccio **Box-Jenkins** è necessario trasformare la serie in modo da renderla stazionaria: alcune delle procedure più comuni usate sono quelle di differenziarla, applicare i logaritmi oppure le differenze dei logaritmi. Nel caso di due o più processi I(1) la teoria economica e finanziaria afferma che tra i processi possa sussistere una **relazione di equilibrio di lungo periodo** attorno alla quale le serie si muovono. Prima di stimare la relazione di equilibrio occorre verificare che le serie oggetto di studio siano integrate. Successivamente tramite l'analisi della **cointegrazione** si procede alla stima dell'equilibrio comune.
La cointegrazione (Guirreri 2008) può essere espressa tramite una relazione lineare tra le variabili oggetto di studio. Ad esempio, si supponga che le variabili siano rappresentate dalla serie $Y_t=(y_{1t},\dots,y_{kt})'$. Una relazione di equilibrio di lungo periodo può essere la seguente

$$\beta' Y_t=\beta_1 y_{1t}+\dots+\beta_k y_{kt}=0,$$

dove $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_k)'$ può essere conosciuto a priori oppure stimato. Empiricamente, questa relazione può non essere soddisfatta in qualsiasi periodo. Per cui è plausibile che vi sia un disequilibrio del tipo $\beta' Y_t=z_t$. Il processo z_t rappresenta la **relazione di disequilibrio** tra le variabili della serie Y_t , quindi se sussiste realmente un equilibrio tra le variabili è attendibile che il processo z_t sia un processo stabile e che le variabili Y_t si muovano insieme, o meglio ancora che siano guidate da un unico trend stocastico comune. Diremo che le variabili Y_t sono cointegrate se esiste una **combinazione lineare** che rende il processo z_t stazionario. Le variabili del processo k-dimensionale Y_t sono dette cointegrate mentre il vettore β è detto vettore di cointegrazione (Granger 1981; Engle and Granger, 1987).



Il vettore di cointegrazione non è unico in quanto basta moltiplicarlo per una costante diversa da zero per ottenere un ulteriore vettore di cointegrazione, proporzionale al primo. Per determinare in maniera univoca il vettore di cointegrazione si procede alla sua **normalizzazione,** per cui se la relazione di cointegrazione è la seguente:

$$\beta_1 y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \beta_3 y_{3t},$$

è normalizzata rispetto alla variabile y_{1t}, ottenendo la seguente relazione

$$y_{1t} = \beta_2^* y_{2t} + \beta_3^* y_{3t},$$

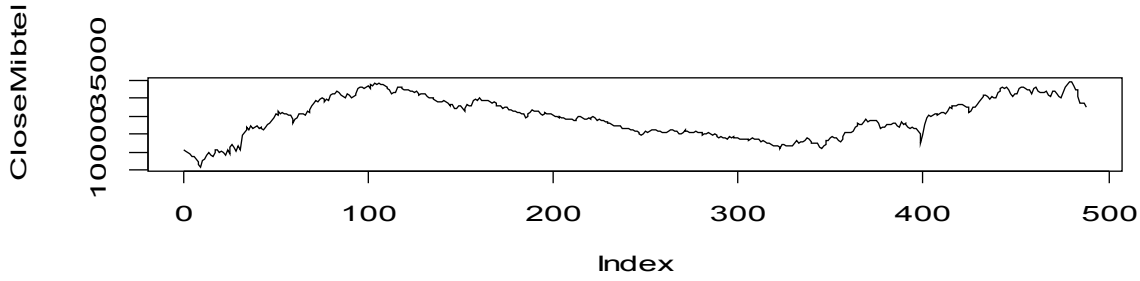
in cui $\beta_2^* = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, $\beta_3^* = \frac{\beta_3}{\beta_1}$ in modo tale che

$$y_{1t} = \beta_2^* y_{2t} + \beta_3^* y_{3t} \sim I(0).$$

Questa prassi di normalizzare il vettore di cointegrazione è effettuata da tutti i software econometrici compreso R.

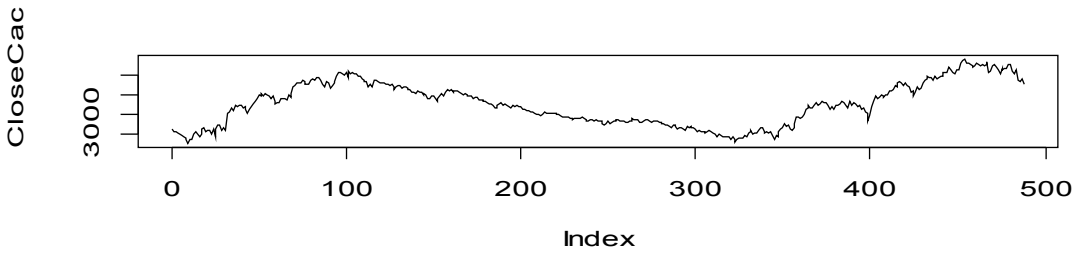
Carichiamo i dati delle 4 serie Nasdq, Mibtel, Cac40 e Dax.

```
> dati1 <- read.csv("C:\\R\\Mibtel2.csv", header = TRUE, sep =
";", na.string = " ")
> attach(dati1)
> names(dati1)
[1] "Date"         "Open"         "High"         "Low"
"CloseMibtel"
[6] "Volume"       "Adj.Close"
> plot(CloseMibtel, type = "l")
```

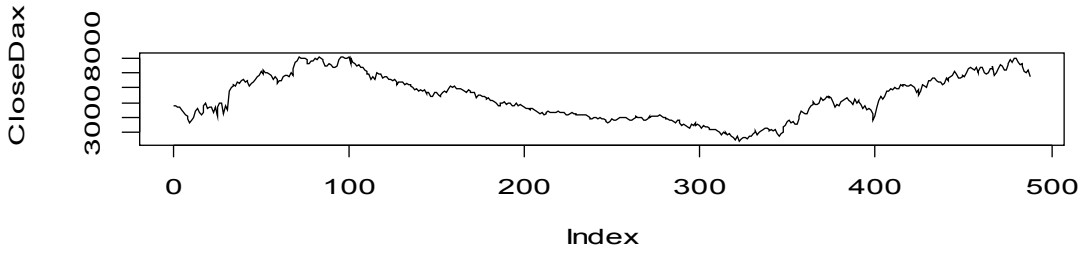



```
> dati2 <- read.csv("C:\\R\\Cac40.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati2)
> names(dati2)
[1] "Date"        "Open"        "High"        "Low"         "CloseCac"
[6] "Volume"      "Adj.Close"
```

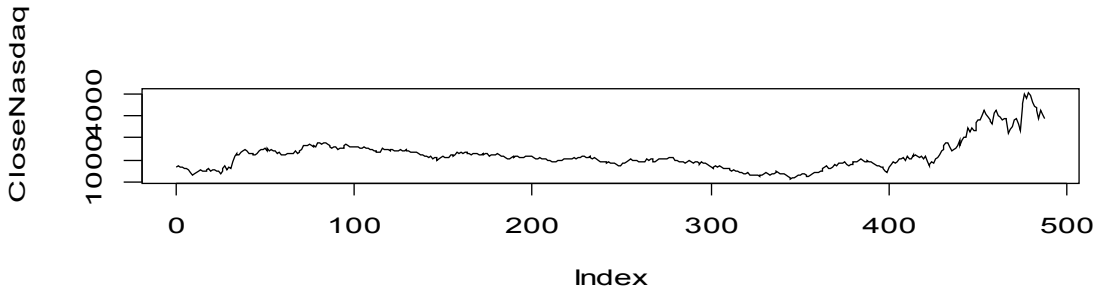
```
> plot(CloseCac, type = "l")
```




```
> dati3 <- read.csv("C:\\R\\Dax.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati3)
> names(dati3)
[1] "Date"      "Open"      "High"      "Low"       "CloseDax"
"Volume"
[7] "Adj.Close"

> plot(CloseDax, type = "l")
```




```
> dati4 <- read.csv("C:\\R\\Nasdaq.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati4)
> names(dati4)
[1] "Date"        "Open"        "High"        "Low"
"CloseNasdaq"
[6] "Volume"      "Adj.Close"

> plot(CloseNasdaq, type = "l")
```



```
> Nasdaq <- CloseNasdaq
> Mibtel <- CloseMibtel
> Cac40 <- CloseCac
> Dax <- CloseDax
```

Consideriamo (seguendo Guirreri 2008) un processo di quattro variabili integrate di ordine 1 del tipo $Y_t=(y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}, y_{4t})$ e supponiamo che sia cointegrato con vettore di cointegrazione $\beta=(1,-\beta_{2,},-\beta_{3,},-\beta_4)'$, in modo tale che $\beta' Y_t = y_{1t}-\beta_2 y_{2t}-\beta_3 y_{3t}-\beta_4 y_{4t}$ ~ I(0). Si dimostra, tramite il famoso teorema di rappresentazione di Granger (Engle and Granger, 1987), che se le serie sono cointegrate allora esiste una rappresentazione in forma ECM, e se esiste una forma ECM e le serie sono integrate allora sono cointegrate. Questo famoso teorema dalla dimostrazione abbastanza complessa definisce un legame tra le serie cointegrate e la loro rappresentazione in ECM. La rappresentazione del sistema cointegrato, $\beta' Y_t$, in forma ECM è la seguente

$$\Delta y_{1t}=c_1+\alpha_1(y_{1t-1}-\beta_2 y_{2t-1}-\beta_3 y_{3t-1}-\beta_4 y_{4t-1})+\gamma_{11}\Delta y_{1t-1}+\gamma_{12}\Delta y_{2t-1}+\gamma_{13}\Delta y_{3t-1}+\dots \\ \dots\gamma_{14}\Delta y_{4t-1}+u_{1t};$$

$$\Delta y_{2t}=c_2+\alpha_2(y_{1t-1}-\beta_2 y_{2t-1}-\beta_3 y_{3t-1}-\beta_4 y_{4t-1})+\gamma_{21}\Delta y_{1t-1}+\gamma_{22}\Delta y_{2t-1}+\gamma_{23}\Delta y_{3t-1}+\dots \\ \dots\gamma_{24}\Delta y_{4t-1}+u_{2t};$$

$$\Delta y_{3t}=c_3+\alpha_3(y_{1t-1}-\beta_2 y_{2t-1}-\beta_3 y_{3t-1}-\beta_4 y_{4t-1})+\gamma_{31}\Delta y_{1t-1}+\gamma_{32}\Delta y_{2t-1}+\gamma_{33}\Delta y_{3t-1}+\dots \\ \dots\gamma_{34}\Delta y_{4t-1}+u_{3t}.$$

$$\Delta y_{4t}=c_4+\alpha_4(y_{1t-1}-\beta_2 y_{2t-1}-\beta_3 y_{3t-1}-\beta_4 y_{4t-1})+\gamma_{41}\Delta y_{1t-1}+\gamma_{42}\Delta y_{2t-1}+\gamma_{43}\Delta y_{3t-1}+\dots \\ \dots\gamma_{44}\Delta y_{4t-1}+u_{4t}.$$

Il sistema è rappresentato in forma matriciale nel modo seguente:

$$\Delta Y_t=\Pi Y_{t-1}+\Gamma_1\Delta Y_{t-1}+u_t.$$

Questa è la rappresentazione del VAR(2) quadrivariato in forma **vector error correction model** che è la versione multivariata del test di Dickey Fuller. Se il sistema è cointegrato allora la matrice Π può essere scritta come prodotto tra $\alpha\beta'$ in cui: α di dimensione (k*r) è chiamata **matrice dei pesi (matrix loading)**, mentre β di dimensione (k*r) è la **matrice di cointegrazione**. Il numero di relazioni di cointegrazione nella serie Y_t è determinato tramite il **rango** della matrice Π che è indicato con **r**. In particolare, si può avere che

- Se rango $(\Pi)=r=0$ allora ΔY_t è un VAR(p-1) stazionario;
- Se $rango(\Pi)=r=k$ allora Y_t non ha radici unitarie, quindi è un VAR(p) stazionario;
- Se $0<rango(\Pi)<k$ allora la serie Y_t ha r relazioni di cointegrazione e k-r trend comuni. La matrice Π, di dimensione (k*k), può essere decomposta come prodotto $\alpha\beta'$.

In R l'analisi della cointegrazione è implementata nel pacchetto "**urca**", in particolare, la funzione **ca.jo()** esegue la **procedura di Johansen** che consente di determinare il rango di cointegrazione. Questa metodologia utilizza due test:

- il **test traccia** (**trace test**);
- oppure il **test del massimo autovalore** (**maximum eigenvalue statistic**);

i quali sono entrambi un rapporto di verosimiglianza con distribuzione diversa dalla χ^2.
La distribuzione di questi test statistici dipende dal numero delle relazioni di cointegrazione specificate sotto l'ipotesi nulla H_0.
Il test traccia $\lambda_{LR}(r_0, k)$ fa riferimento al seguente sistema di ipotesi

$$H_0: rango(\Pi) = r_0$$
$$H_1: r_0 < rango(\Pi) < k.$$

Il test del massimo autovalore $\lambda_{LR}(r_0, r_0+1)$, saggia il seguente sistema di ipotesi

$$H_0: rango(\Pi) = r_0$$
$$H_1: rango(\Pi) = r_0 + 1.$$

Nel VECM può essere aggiunta anche la parte deterministica che può essere una costante oppure un trend lineare o entrambi (cfr. Lutkepol 2005). La stima del VECM è effettuata tramite gli OLS oppure, se il processo Y_t è gaussiano, tramite il metodo della massima verosimiglianza.

Abbiamo raccolto i dati settimanali dei quattro indici di mercato dall'1 Gen 2000 all' 8 Mag 2009. Proviamo ad applicare il test di Johansen sulle 4 serie I(1).

```
> cointegrazione <- ca.jo(cbind(Mibtel, Cac40, Dax, Nasdaq), type=
"eigen", ecdet = "none", K=2, spec= "transitory")
> summary(cointegrazione)

######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , with linear
trend

Eigenvalues (lambda):
[1] 0.0386171581 0.0297099827 0.0159734514 0.0004936859

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct  1pct
r <= 3 |  0.24  6.50  8.18 11.65
```

```
r <= 2 |  7.81 12.91 14.90 19.19
r <= 1 | 14.63 18.90 21.07 25.75
r = 0  | 19.10 24.78 27.14 32.14

Eigenvectors, normalised to first column:
(These are the cointegration relations)

           Mibtel.l1    Cac40.l1     Dax.l1  Nasdaq.l1
Mibtel.l1   1.000000   1.0000000  1.0000000   1.000000
Cac40.l1  -47.560401 -87.7860793  0.1947893 -15.110793
Dax.l1     -3.165738  53.4770825  2.4588986 -14.684826
Nasdaq.l1   3.143572  -0.5406507 -4.4017827  -6.268392

Weights W:
(This is the loading matrix)

             Mibtel.l1      Cac40.l1        Dax.l1    Nasdaq.l1
Mibtel.d -0.0446692722  8.272131e-03 -0.0117562047 6.444039e-04
Cac40.d  -0.0006795994  4.226405e-04 -0.0003108128 5.907331e-05
Dax.d    -0.0005899657 -8.245193e-05 -0.0004121152 4.603889e-05
Nasdaq.d -0.0079580035 -2.750485e-03  0.0006642408 3.366382e-04
```

All'interno della funzione ca.jo sono stati specificati:

- la serie storica su cui effettuare l'analisi – in questo caso le quattro serie di chiusura settimanali – su cui si applica la funzione **cbind()** per testare la procedura (es. cbind($y_{1,} y_2, \dots y_n$));
- il tipo di test da eseguire, **eigen** oppure **trace**;
- la parte deterministica, **none** oppure **const** o **trend**;
- la lunghezza del VAR nei livelli **K=2**, a cui corrisponde un VECM di lunghezza **"k-1"**;
- l'opzione **transistory** oppure **longrun** per stimare due tipi VECM. Utilizzando longrun si stima il seguente VECM:

$$\Delta Y_t = \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta Y_{t-k+1} + \Pi Y_{t-k} + \mu + \Phi D_t + \epsilon_t;$$

dove $\Phi_1 = -(I - A_1 - \dots - A_i)$, (con A_i matrici del VAR ed i=1,...,k-1) sono le matrici che misurano l'impatto di lungo periodo sulla variabile ΔY_t, ad una variazione di ΔY_{t-i}. Con l'opzione transistory si ha:

$$\Delta Y_t = \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta Y_{t-k+1} + \Pi Y_{t-1} + \mu + \Phi D_t + \epsilon_t;$$

in questo caso le matrici $\Gamma_i = -(A_{i+1} + \dots + A_K)$, con $(i = 1, \dots, k-1)$, misurano l'impatto immediato di breve periodo sulla variabile ΔY_t, e la matrice Π si riferisce alle variabili ritardate al tempo t-1 piuttosto che al tempo t-k.

```
> cointegrazione <- ca.jo(cbind(Mibtel, Cac40, Dax, Nasdaq), type=
"eigen", ecdet = "none", K=5, spec= "transitory")
> summary(cointegrazione)

######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , with linear
trend

Eigenvalues (lambda):
[1] 5.645416e-02 2.765636e-02 2.214136e-02 6.964931e-05

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct  1pct
r <= 3 |  0.03  6.50  8.18 11.65
r <= 2 | 10.79 12.91 14.90 19.19
r <= 1 | 13.52 18.90 21.07 25.75
r = 0  | 28.01 24.78 27.14 32.14

Eigenvectors, normalised to first column:
(These are the cointegration relations)

           Mibtel.l1   Cac40.l1      Dax.l1  Nasdaq.l1
Mibtel.l1   1.000000   1.000000    1.000000   1.000000
Cac40.l1  -19.488431 -45.176504 -105.665277 -16.448184
Dax.l1    -39.337796  20.271079   40.953405 -20.764766
Nasdaq.l1   5.971902  -1.379071    4.353122  -5.022969

Weights W:
(This is the loading matrix)

             Mibtel.l1      Cac40.l1        Dax.l1    Nasdaq.l1
Mibtel.d -0.0319343121 -0.0297294796  0.0037738254 2.988834e-04
Cac40.d  -0.0006341414 -0.0005540369  0.0002434777 2.476129e-05
Dax.d    -0.0003795494 -0.0011899162  0.0001204608 1.831963e-05
Nasdaq.d -0.0029783633 -0.0021719938 -0.0039202280 1.021382e-04
```

Il test identifica 0 e 1 relazioni di cointegrazione rilevanti - abbiamo dovuto incrementare i ritardi per potenziare l'effetto - ovvero l' H_0 di r<=1 non può essere rifiutata. Con i comandi **cointegrazione... @teststat, @cval** si ottengono in sintesi i valori del test e quelli di soglia, attributi dell'oggetto cointegrazione. Con **@V, @W, @PI** la matrice di cointegrazione normalizzata rispetto a $y_1(\beta_i)$, la matrice dei pesi (α_i), la matrice Π.

Dai grafici precedenti la situazione era piuttosto evidente, suggerendoci l'adozione di una relazione di cointegrazione principale. Affrontando il punto successivo, ossia la stima del vettore di cointegrazione β, per controllare che la relazione di cointegrazione sia effettivamente valida, si dovrebbe ottenere che la combinazione lineare $\beta' Y_{t-1}$ è un processo stazionario.

```
> cointegrazione@W %*% t(cointegrazione@V)
             Mibtel.l1   Cac40.l1       Dax.l1     Nasdaq.l1
Mibtel.d -0.0575910829 1.56174518  0.801921590 -0.1347828695
Cac40.d  -0.0009199394 0.01125346  0.023171875 -0.0020874611
Dax.d    -0.0014306852 0.04812323 -0.004637369 -0.0001932909
Nasdaq.d -0.0089684468 0.56871870 -0.089533968 -0.0323694266

> beta <- cointegrazione@V[,1]
> Yl1 <- cointegrazione@ZK[27]
> beta.Yl1 <- t(beta %*% t(Yl1))
> summary(ur.df(beta.Yl1))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4491.92  -285.34   -27.65   254.28  6214.08

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1     0.0008658  0.0014193   0.610    0.542
z.diff.lag -0.1848905  0.0450594  -4.103 4.79e-05 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 737 on 478 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.03433,    Adjusted R-squared: 0.03029
F-statistic: 8.497 on 2 and 478 DF,  p-value: 0.0002364


Value of test-statistic is: 0.61

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

27 Con **str()** possiamo andare a vedere la struttura dell'oggetto cointegrazione ed estrapolare ciò che ci serve.

```
> summary(ur.kpss(beta.Yl1))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 5 lags.

Value of test-statistic is: 2.2542

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

I test sono discoradanti: il KPSS rifiuta nettamente l'ipotesi di stazionarietà di βy_{t-1}. Ciò può essere dovuto alla scarsa potenza dei test che stiamo utilizzando.
Per procedere con la stima del **VECM** si utilizza la funzione **cajools()** che esegue una stima dei parametri del VECM con OLS.

```
> ecm.stima <- cajools(cointegrazione)
> summary(ecm.stima)
Response Mibtel.d :

Call:
lm(formula = substitute(Mibtel.d), data = data.mat)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2381.23  -329.62   -43.84   332.95  3121.94

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant   1156.17084  341.00378   3.390 0.000758 ***
Mibtel.dl1    0.35978    0.09296   3.870 0.000124 ***
Cac40.dl1   -14.12933    3.65654  -3.864 0.000127 ***
Dax.dl1      -3.90272    3.58562  -1.088 0.276971
Nasdaq.dl1    1.63099    0.28496   5.724 1.88e-08 ***
Mibtel.dl2    0.11283    0.09400   1.200 0.230665
Cac40.dl2    -5.77239    3.73442  -1.546 0.122857
Dax.dl2       0.60455    3.59595   0.168 0.866563
Nasdaq.dl2    0.61872    0.30343   2.039 0.042010 *
Mibtel.dl3    0.05784    0.09462   0.611 0.541310
Cac40.dl3     5.58997    3.74793   1.491 0.136519
Dax.dl3     -12.73753    3.63568  -3.503 0.000504 ***
Nasdaq.dl3    0.41274    0.30422   1.357 0.175529
Mibtel.dl4   -0.02270    0.09633  -0.236 0.813807
Cac40.dl4    -1.74993    3.69360  -0.474 0.635885
Dax.dl4      -0.28084    3.62773  -0.077 0.938327
Nasdaq.dl4    0.60703    0.30007   2.023 0.043658 *
Mibtel.l1    -0.05759    0.02063  -2.792 0.005461 **
```

```
Cac40.l1      1.56175    1.16021   1.346 0.178935
Dax.l1        0.80192    0.57615   1.392 0.164635
Nasdaq.l1    -0.13478    0.07157  -1.883 0.060311 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 582.6 on 461 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1985,     Adjusted R-squared: 0.162
F-statistic: 5.438 on 21 and 461 DF,  p-value: 5.435e-13


Response Cac40.d :

Call:
lm(formula = substitute(Cac40.d), data = data.mat)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-59.8431  -9.5878  -0.3635   8.5720  89.8349

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant   19.5651535  9.7213689   2.013 0.044739 *
Mibtel.dl1  0.0109661  0.0026502   4.138 4.17e-05 ***
Cac40.dl1  -0.4969647  0.1042411  -4.767 2.51e-06 ***
Dax.dl1    -0.0338511  0.1022193  -0.331 0.740673
Nasdaq.dl1  0.0303507  0.0081237   3.736 0.000210 ***
Mibtel.dl2  0.0042076  0.0026799   1.570 0.117083
Cac40.dl2  -0.3327476  0.1064613  -3.126 0.001887 **
Dax.dl2     0.2201220  0.1025138   2.147 0.032295 *
Nasdaq.dl2  0.0083728  0.0086501   0.968 0.333581
Mibtel.dl3  0.0010792  0.0026975   0.400 0.689289
Cac40.dl3   0.1299390  0.1068465   1.216 0.224559
Dax.dl3    -0.3009853  0.1036463  -2.904 0.003862 **
Nasdaq.dl3 -0.0028352  0.0086727  -0.327 0.743881
Mibtel.dl4  0.0013900  0.0027463   0.506 0.613017
Cac40.dl4  -0.1396469  0.1052975  -1.326 0.185426
Dax.dl4     0.0656214  0.1034197   0.635 0.526059
Nasdaq.dl4  0.0079391  0.0085545   0.928 0.353866
Mibtel.l1  -0.0009199  0.0005881  -1.564 0.118448
Cac40.l1    0.0112535  0.0330753   0.340 0.733833
Dax.l1      0.0231719  0.0164249   1.411 0.158985
Nasdaq.l1  -0.0020875  0.0020404  -1.023 0.306819
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 16.61 on 461 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1722,     Adjusted R-squared: 0.1345
F-statistic: 4.567 on 21 and 461 DF,  p-value: 2.499e-10
```

```
Response Dax.d :

Call:
lm(formula = substitute(Dax.d), data = data.mat)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-70.4656  -9.3316  -0.3593   8.5807  85.8648

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant    2.527e+01  9.391e+00   2.691 0.007383 **
Mibtel.dl1  1.144e-02  2.560e-03   4.470 9.87e-06 ***
Cac40.dl1  -3.689e-01  1.007e-01  -3.664 0.000277 ***
Dax.dl1    -1.622e-01  9.875e-02  -1.643 0.101121
Nasdaq.dl1  3.894e-02  7.848e-03   4.961 9.87e-07 ***
Mibtel.dl2  5.677e-03  2.589e-03   2.193 0.028812 *
Cac40.dl2  -2.241e-01  1.028e-01  -2.179 0.029812 *
Dax.dl2     1.699e-02  9.903e-02   0.172 0.863840
Nasdaq.dl2  6.121e-03  8.356e-03   0.732 0.464262
Mibtel.dl3  2.979e-03  2.606e-03   1.143 0.253619
Cac40.dl3   1.382e-01  1.032e-01   1.338 0.181414
Dax.dl3    -3.711e-01  1.001e-01  -3.707 0.000236 ***
Nasdaq.dl3 -4.493e-03  8.378e-03  -0.536 0.592043
Mibtel.dl4  8.367e-05  2.653e-03   0.032 0.974855
Cac40.dl4   5.762e-03  1.017e-01   0.057 0.954857
Dax.dl4    -1.105e-02  9.991e-02  -0.111 0.911964
Nasdaq.dl4  5.038e-03  8.264e-03   0.610 0.542410
Mibtel.l1  -1.431e-03  5.681e-04  -2.518 0.012134 *
Cac40.l1    4.812e-02  3.195e-02   1.506 0.132729
Dax.l1     -4.637e-03  1.587e-02  -0.292 0.770220
Nasdaq.l1  -1.933e-04  1.971e-03  -0.098 0.921928
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 16.04 on 461 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1805,     Adjusted R-squared: 0.1431
F-statistic: 4.834 on 21 and 461 DF,  p-value: 3.831e-11


Response Nasdaq.d :

Call:
lm(formula = substitute(Nasdaq.d), data = data.mat)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-586.477  -43.032   -1.327   38.461 1071.206
```

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant   179.815368  62.861428   2.861  0.00442 **
Mibtel.dl1   0.016685   0.017137   0.974  0.33074
Cac40.dl1   -0.856303   0.674055  -1.270  0.20459
Dax.dl1      0.781673   0.660982   1.183  0.23758
Nasdaq.dl1  -0.073644   0.052530  -1.402  0.16161
Mibtel.dl2  -0.022148   0.017329  -1.278  0.20187
Cac40.dl2    0.458402   0.688412   0.666  0.50582
Dax.dl2      0.081368   0.662887   0.123  0.90236
Nasdaq.dl2   0.037032   0.055934   0.662  0.50826
Mibtel.dl3  -0.011296   0.017443  -0.648  0.51758
Cac40.dl3    0.467418   0.690903   0.677  0.49904
Dax.dl3     -0.764967   0.670210  -1.141  0.25430
Nasdaq.dl3   0.001131   0.056080   0.020  0.98391
Mibtel.dl4   0.005617   0.017759   0.316  0.75194
Cac40.dl4   -1.401422   0.680886  -2.058  0.04013 *
Dax.dl4      1.588758   0.668744   2.376  0.01792 *
Nasdaq.dl4   0.039743   0.055316   0.718  0.47283
Mibtel.l1   -0.008968   0.003803  -2.358  0.01877 *
Cac40.l1     0.568719   0.213875   2.659  0.00811 **
Dax.l1      -0.089534   0.106209  -0.843  0.39967
Nasdaq.l1   -0.032369   0.013194  -2.453  0.01452 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 107.4 on 461 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.06807,    Adjusted R-squared: 0.02562
F-statistic: 1.603 on 21 and 461 DF,  p-value: 0.04444
```

Tramite la funzione **summary()** applicato al'oggetto **ecm.stima**, di classe lm, si accede alla stima dei parametri del VECM. In questa fase non abbiamo lavorato sui logaritmi delle serie, il che preclude una interpreatazione economica pertinente. Nel prossimo capitolo lavoreremo invece su serie opportunamente trasformate.

3.6 Appendice statistica C

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare, t.d., sottoposto ad ingressi aleatori

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+w(k)$$
$$y(k)=Cx(k)+v(k)$$

dove x(k) è lo stato, u(k) l'ingresso, y(k) l'uscita, w(k) il disturbo di processo e v(k) il disturbo di misura.

Osservazione - Tutte queste grandezze (e non solo lo stato) possono essere vettoriali.

Si adottano le seguenti ipotesi statistiche:

$$w(k) \sim WN(0;Q)$$
$$v(k) \sim WN(0;R)$$
$$x(0) \sim (m0;\ P0)$$

x(0), w(l), v(j) fra loro incorrelati per ogni l,j ≥ 0.

Osservazione - Anche se non espressamente indicato, tutti i parametri del modello possono variare nel tempo.

L'informazione disponibile e rappresentata dalle misure { y^k = y(1), y(2),..., y(k)}. Si desidera stimare il valore assunto dallo stato. Piu precisamente si desidera calcolare:

- $\hat{x}$ (j|k) $\in R^n$: stima lineare a MEQM[28] di x(j) basata sulle osservazioni y^k;
- P(j|k)=E[$\tilde{x}$ (j|k) $\tilde{x}'$ (j|k)]: matrice di varianza dell'errore di stima $\tilde{x}$ (j|k)= x(j)- $\hat{x}$ (j|k).

Inoltre il calcolo deve avvenire in maniera ricorsiva rispetto agli indici j e/o k. La stima cioe deve essere generata da equazioni ricorsive.

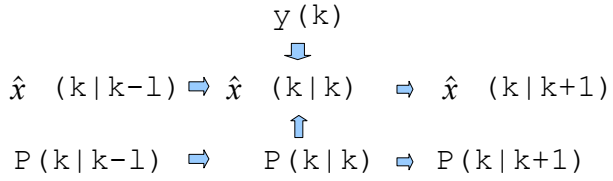
Classificazione della stima:
Predizione se j > k.
Filtraggio se j = k.
Interpolazione se j < k.

Osservazione - *Il **filtro di Kalman** in sostanza mira a stimare lo stato di un sistema dinamico sulla base di misure sull'uscita in un contesto statistico.*
Lo stesso problema viene affrontato nell'Analisi dei Sistemi in un contesto deterministico, cioe in assenza di disturbi, e viene risolto introducendo il ricostruttore dello stato. Il filtro di Kalman appare una generalizzazione del ricostruttore dello stato.

Struttura ricorsiva della soluzione - Nella formulazione del problema sono individuati due indici temporali: j che denota l'istante per il quale desideriamo la stima; k che denota l'istante dell'ultima misura disponibile. Quando cerchiamo una soluzione ricorsiva dobbiamo quindi specificare rispetto a quale indice temporale la ricorsione deve avvenire.

Il filtro di Kalman ha una struttura ricorsiva particolare, secondo la quale vengono aggiornate, in prima battuta, la stima $\hat{x}$ (j|k) e la matrice di varianza P(j|k). Essa è rappresentata dal seguente grafo:

28 Stimatore a minimo errore quadratico medio.



La struttura ricorsiva sopra descritta rappresenta il nucleo del Filtro di Kalman. Essa si articola in due aggiornamenti:

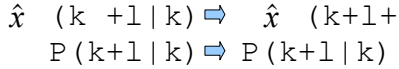
- **Aggiornamento alla misura**: la stima predittiva (e la rispettiva matrice di varianza dell'errore) viene aggiornata per effetto di una nuova misura diventando una stima filtrata.
- **Aggiornamento temporale**: la stima filtrata viene aggiornata per inseguire l'evoluzione dello stato, diventando nuovamente stima predittiva, ma all'istante successivo.

Le frecce del grafo sopra descritto indicano le informazioni necessarie per calcolare una certa grandezza. Risulta pertanto che:

- L'**aggiornamento della matrice di varianza** avviene indipendentemente dalle misure e dalla stima dello stato. Di fatto puo essere precalcolato.
- L'**aggiornamento della stima dello stato** ad un nuova misura, dipende non solo dalla misura (ovvio), ma anche dalla matrice di varianza dell'errore di stima. Quest'ultima pertanto non solo consente di valutare la qualità della stima ma è indispensabile per ottenerla. Rappresenta quindi un onere computazionale inevitabile.

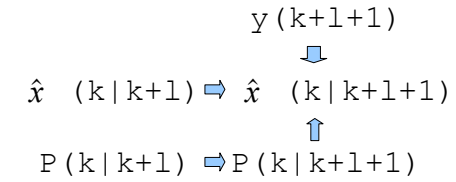
Dopo aver implementato la ricorsione di base è possibile implementare altre due ricorsioni per calcolare:

Stima predittiva (nel futuro):



con l = 1,2...

Interpolazione (nel passato)



l = 1,2...

Soluzione - Propagazione della stima dello stato:

- **Aggiornamento alla misura**

$$\hat{x}(k \mid k) = \hat{x}(k \mid k-1) + \mathrm{K}(\mathrm{k})\,\mathrm{e}(\mathrm{k}),\quad \mathrm{e}(\mathrm{k}) = \mathrm{y}(\mathrm{k}) - \mathrm{C}\ \hat{x}(k \mid k-1)$$

$$\mathrm{K}(\mathrm{k}) = \mathrm{P}(\mathrm{k} \mid \mathrm{k}\text{-}1)\,\mathrm{C}'\ G(k)^{-1},\quad \mathrm{G}(\mathrm{k}) = \mathrm{CP}(\mathrm{k} \mid \mathrm{k}\text{-}1)\,\mathrm{C}' + \mathrm{R}$$

- **Aggiornamento temporale**

$$\hat{x}(k+1 \mid k) = \mathrm{A}\ \hat{x}(k \mid k) + \mathrm{Bu}(\mathrm{k})$$

1. Il processo e(k) viene chiamato processo delle innovazioni del processo y(k). e(k) è un processo bianco, a media nulla, e con varianza Var(e(k)) = G(k).
2. La matrice K(k) viene chiamata guadagno di Kalman. Esso dipende dalla matrice di varianza P(k|k-1).
3. L'aggiornamento della stima alla misura dipende dal valore assunto dal guadagno di Kalman K(k) e dall' errore di predizione della misura e(k). Se la misura viene predetta esattamente (e(k) =0), essa e ridondante e non concorre a modicare la stima dello stato.

Soluzione – Propagazione della matrice di varianza:

- **Aggiornamento alla misura**
$$P(k \mid k) = P(k \mid k-1) - P(k \mid k-1)C'(CP(k \mid k-1)C' + R)^{-1}CP(k \mid k-1)$$

- **Aggiornamento temporale**
$$P(k+1 \mid k) = AP(k \mid k)A' + Q$$

Osservazione - L'equazione di aggiornamento di P(k|k-1) alla misura puo essere riscritta come:

$$P(k \mid k)^{-1} = P(k \mid k-1)^{-1} + C'R^{-1}C$$

Questa equazione descrive l'evoluzione della inversa della matrice P(k|k-1) chiamata matrice di informazione I(k|k-1). Formalmente questa ricorsione in I assomiglia alla formula di aggiornamento temporale per P.

Le due equazioni di aggiornamento (al tempo e alla misura) possono essere fuse insieme ottenendo:

$$\hat{x}(k+1 \mid k) = A\hat{x}(k \mid k) + AK(k)(y(k) - C\hat{x}(k \mid k-1) + Bu(k)) =$$

$$= A(I - K(k)C)\hat{x}(k \mid k-1) + AK(k)y(k) + Bu(k), \quad \hat{x}(1 \mid 0) = m_0;$$

$$P(k+1 \mid k) = AP(k \mid k-1)A' - AP(k \mid k-1)C'G(k)^{-1}CP(k \mid k-1)A' + Q, \quad P(1 \mid 0) = P_0;$$

Quest'ultima equazione viene chiamata **Equazione ricorsiva di Riccati.** Da essa dipende il valore assunto dal guadagno di Kalman. Anche per sistemi stazionari la matrice P(k|k-1) e quindi il guadagno K(k) sono tempo-varianti.
La matrice A(I-K(k)C) rappresenta la matrice della dinamica del filtro.

Predizione a piu passi in avanti e interpolazione

- **Predizione a piu passi.** E facile vericare che
$$\hat{x}(k+l+1 \mid k) = A\hat{x}(k+l \mid k)$$
$$P(k+l+1 \mid k) = AP(k+l \mid k)A' + Q$$

- **Interpolazione.** E più difficile dimostrare che
$\hat{x}(k_0 \mid k) = \hat{x}(k_0 \mid k-1) + \overline{K}(k) e(k)$
$e(k) = (y(k) - C\hat{x}(k \mid k-1))$
$\overline{K}(k) = \overline{P}(k \mid k-1) C' (CP(k \mid k-1) C' + R)^{-1}$
$\overline{P}(k+1 \mid k) = (A - K(k) C) \overline{P}(k \mid k-1)$

mentre K(k) e P(k|k-1) rappresentano il guadagno di Kalman e la matrice di varianza del filtro di Kalman base.
Si noti come ogni misura successiva all'istante k_0 contribuisca a modificare la stima interpolata di $x(k_0)$ in maniera proporzionale all'innovazione della misura stessa calcolata dal filtro di Kalman base. Il peso da assegnare all'innovazione è dato dal guadagno $\overline{K}(k)$ che differisce dal guadagno di Kalman K(k).

Il Filtro di Kalman e la ricostruzione dello stato

Un classico **problema** della Teoria dei Sistemi è il seguente: Dato il sistema dinamico lineare

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k);$$

in cui lo stato iniziale non è accessibile, determinare un algoritmo che, elaborando le uscite, fornisca una approssimazione sempre migliore dello stato corrente x(k). La **soluzione** è fornita dal filtro ricostruttore dello stato:

$$\hat{x}(k) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k-1))$$

La scelta del guadagno L che pesa la differenza fra l'uscita del sistema e l'uscita del filtro ricostruttore avviene tenendo conto che l'errore di ricostruzione $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ evolve secondo l'equazione:

$$\tilde{x}(k) = (A - LC)\tilde{x}(k-1)$$

L'asintotica stabilita della matrice A-LC garantisce il raggiungimento dell'obiettivo. Confrontando il ricostruttore dello stato col filtro di Kalman si nota che essi hanno lo stessa struttura. Tuttavia l'evoluzione dell'errore di stima $\tilde{x}(k \mid k-1) = x(k) - \hat{x}(k \mid k-1)$ è aleatoria dovendo tener conto dei disturbi di processo e di misura:

$$\tilde{x}(k+1 \mid k) = A(I - KC)\tilde{x}(k \mid k-1) + w(k) - Kv(k)$$

Adesso il guadagno K non influenza solo la dinamica del filtro A(I-KC), ma anche l'amplificazione del disturbo di misura v(k).
Bisogna operare un compromesso tra dinamica rapida (alti valori del guadagno) e reiezione del disturbo di misura (bassi valori del guadagno). Nel Filtro di Kalman, la scelta del guadagno K avviene

in modo da minimizzare, istante per istante, la varianza di $\tilde{x}(k \mid k-1)$.

Un problema di ottimo

Sia $\{ \hat{x}(k \mid N), k=1,\ldots,N \}$ successione di **stime interpolate** dello stato fornita dal filtro di Kalman basate sulle misure y(1),... , y(N).
Si può dimostrare che questa successione è la soluzione del seguente **problema di ottimo:**

$\{ \hat{x}(k \mid N), k=1,\ldots,N \}=$

$$arg\,min_{s(k),\,k=1,\ldots,N}\{\left\|s(1)-m_0\right\|^2_{P_0^{-1}}+\sum_{k=1}^{N-1}\left\|s(k+1)-As(k)-Bu(k)\right\|^2_{Q^{-1}}+\sum_{k=1}^{N}\left\|y(k)-Cs(k)\right\|^2_{R^{-1}}\}$$

In sostanza la successione $\{ \hat{x}(k \mid N), k=1,\ldots,N \}$ è fra tutte le successioni {s(1),..., s(N)} quella che meglio interpola una combinazione pesata de:

- la **incertezza iniziale,** rendendo piccolo il termine $\left\|s(1)-m_0\right\|^2_{P_0^{-1}}$;
- le **misure,** rendendo piccolo il termine $\left\|y(k)-Cs(k)\right\|^2_{R^{-1}}$; (rappresenta l'errore di interpolazione della k-esima misura);
- la **dinamica,** rendendo piccolo il termine $\left\|s(k+1)-As(k)-Bu(k)\right\|^2_{Q^{-1}}$ che rappresenta l'errore di interpolazione della dinamica al passo k.

Si noti che questi ultimi due errori sono pesati in base all'**inverso della matrice di varianza** rispettivamente del **disturbo di misura** e del **disturbo di processo.**
In altri termini se le misure sono affette da grossi errori (R elevata) non è necessario che la stima dello stato le riproduca con precisione; e viceversa se la dinamica dello stato è molto incerta (Q elevata) è opportuno che la stima segua le misure, anche a scapito di una sua evoluzione temporale assai irregolare.

Capitolo 4: Politica monetaria e mercati finanziari[29]

La politica monetaria comporta due decisioni fondamentali (O. Blanchard 2000). La prima è la scelta del tasso medio di inflazione e quindi di un corrispondente tasso medio di crescita della moneta. La seconda è la scelta di quanto deviare da questa media per ridurre le fluttuazioni della produzione.

- Nel **breve** e nel **medio periodo**, la politica monetaria influisce sia sul livello sia sulla composizione della produzione. Un aumento della moneta riduce i tassi di interesse e provoca un deprezzamento della valuta. A sua volta questo fa aumentare la domanda di beni e la produzione.
- Nel **lungo periodo**, tuttavia, la politica monetaria è neutrale. Le variazioni del livello della moneta alla fine generano un aumento proporzionale dei prezzi, lasciando inalterate la produzione e la disoccupazione. Le variazioni del tasso di crescita della moneta si riflettono invece in variazioni del tasso di inflazione.

In questo contesto sono due i punti rilevanti:

- il **tasso ottimale di inflazione**;
- la **relazione tra crescita della moneta ed inflazione**.

4.1 Sul tasso ottimale di inflazione

Nella maggior parte dei paesi OCSE l'inflazione è a livelli bassi. Una delle questioni che si pongono le banche centrali riguarda l'opportunità di ridurre ulteriormente l'inflazione per raggiungere la stabilità dei prezzi.

Le principali **ragioni a favore della stabilità dei prezzi** sono:

- la combinazione di inflazione e sistemi fiscali non perfettamente indicizzati genera distorsioni fiscali;
- a causa dell'illusione monetaria[30], l'inflazione induce le persone e le imprese a prendere decisioni non corrette;
- una maggiore inflazione di solito è accompagnata da una maggior volatilità dell'inflazione stessa, che aumenta l'incertezza e rende difficile alle persone ed alle imprese prendere decisioni sul futuro;
- l'obiettivo della stabilità dei prezzi ha i pregi della semplicità e della credibilità che mancano invece ad un obiettivo di un tasso di inflazione positivo.

Ci sono anche **ragioni a favore di un tasso di inflazione**

29 Definizioni Oliver Blanchard "Macroeconomia" e Bagliano, Marotta "Economia Monetaria"

30 Errata non distinzione tra grandezze nominali e reali.

moderatamente positivo:

- i ricavi derivanti dalla crescita della moneta (signoraggio) consentono di ridurre altri tipi di imposte. Tuttavia, questa argomentazione è quantitativamente irrilevante nel confronto tra un tasso di inflazione ad es. del 5% ed un tasso di inflazione nullo;
- quando sono necessarie riduzioni dei salari reali, un'inflazione positiva consente alle imprese di operare tagli salariali senza ricorrere a riduzioni dei salari nominali;
- un'inflazione effettiva ed attesa positiva consente alla banca centrale di ottenere tassi di interesse reali negativi, opzione che potrebbe essere utile per combattere una recessione;
- una riduzione del tasso di inflazione a zero farebbe aumentare la disoccupazione per un certo periodo di tempo, e questo costo di transizione potrebbe eccedere qualunque beneficio derivante dalla stabilità dei prezzi.

4.2 Sulla relazione tra crescita della moneta ed inflazione

4.2.1 Moneta e liquidità - Non c'è una distinzione netta tra "moneta" e "titoli", ma piuttosto un'ampia gamma di attività finanziarie che differiscono tra loro per grado di liquidità e per tasso di rendimento. Il menu di attività finanziarie liquide va dal circolante ai depositi in conto corrente, dai fondi comuni monetari ai depositi vincolati. Per definizione:

- M1 = circolante ed assegni turistici + depositi in conto corrente;
- M2 = quote di fondi comuni monetari + depositi comuni monetari e depositi a risparmio + depositi vincolati (sotto i 100 mila dollari) + M1
- M3 = aggregato esteso di attività finanziarie.

Quindi, la domanda di M1 - circolante più depositi in conto corrente - dipende dalla convenienza dei sostituti più prossimi di M1, ad esempio i fondi comuni monetari. Quando vengono introdotte sul mercato nuove attività finanziarie fruttifere, la domanda di M1 si sposta, complicando il compito della banca centrale.
Date le variazioni della domanda di moneta, sarebbe imprudente per la banca centrale mantenere un tasso costante di crescita di M1. Il monitoraggio degli aggregati - in particolare di M1 ed M2 - consente alla banca centrale di identificare e rispondere alle variazioni della domanda di moneta.

4.2.2 Tassi di interesse reali e nominali - Le decisioni di spesa dipendono dal tasso di interesse reale, in termini i beni. Quindi è il tasso di interesse reale che appare nell'equazione IS (curva di equilibrio sul mercato dei beni). Invece nell'equazione LM

(curva di equilibrio sui mercati finanziari) appare il tasso di interesse nominale: *il costo opportunità di detenere moneta piuttosto che titoli è il tasso di interesse nominale*. I due tassi di interesse sono legati da una semplice relazione:

$$IS: Y = C(Y-T) + I(Y,r) + G$$
$$LM: \frac{M}{P} = YL(i)$$
$$con\, r = i - \pi^e.$$

dove Y è la produzione/reddito, C i consumi, I gli investimenti, M/P la quantita di moneta reale, L(i) la domanda di moneta, π l'inflazione, i il tasso di interesse nominale, r il tasso di interesse reale, T le tasse, G la spesa pubblica.

Il breve periodo - Analizziamo gli effetti di un aumento del tasso di crescita dello stock di moneta. Nel b.p. Sono identici all'aumento una tantum del livello dello stock nominale di moneta. L'inflazione non varierà di molto ed i tassi di interesse nominali e reali avranno probabilmente lo stesso andamento. Aumentano i saldi monetari reali: il livello dei prezzi aumenta, ma meno che proporzionalmente rispetto all'aumento dello stock nominale di moneta. *Saldi monetari reali più elevati riducono i tassi di interesse reali e nominali, generando un aumento del livello di produzione*.
Il lungo periodo - *Nel lungo periodo, una crescita più elevata dello stock nominale di moneta non influenza né la disoccupazione, né la produzione, ma si traduce interamente in una inflazione più elevata.* Questa regola è ancora valida nel modello della Domanda aggregata (DA) IS-LM aggiornato (ad r). Il fatto che la crescita della moneta non influisce sulla disoccupazione segue dalla preposizione secondo cui, nel l.p., la disoccupazione torna al suo tasso naturale e quest'ultimo non dipende dalla crescita della moneta. Quindi la crescita di moneta non influenza l'occupazione e la produzione.

4.2.3 Crescita della moneta e tasso di interesse reale - Assumiamo per semplicità che il tasso normale di crescita della produzione sia zero, per cui nel l.p. la produzione torna al suo livello naturale Y_n che non varia nel tempo. Un modo di pensare all'equazione IS è che essa ci dice quale tasso di interesse è necessario per sostenere un dato livello di produzione. Sia quindi r_n il tasso di interesse reale associato al livello naturale di produzione Y_n - cioè al livello di produzione che genera un livello di produzione pari a:

$$Y_n = C(Y_n - T) + I(Y_n, r_n) + G \quad | \quad r_n \ .$$

Se nel l.p. la produzione torna a Y_n allora il tasso di interesse reale nel l.p. torna ad r_n . Questa conclusione estende il

risultato di **"neutralità della moneta"**: nel l.p. l*a crescita della moneta non influisce sulla disoccupazione, sulla produzione e nemmeno sul tasso di interesse reale.*

4.2.4 Crescita della moneta e tasso di interesse nominale - Nel modello IS-LM il tasso di interesse nominale è dato da $i=r+\pi^e$. Nel l.p. è ragionevole assumere che l'inflazione attesa sia uguale all'inflazione effettiva $\pi^e=\pi$. A sua volta l'inflazione effettiva si muove proporzionalmente alla crescita dello stock di moneta. Infatti sotto l'ipotesi che il tasso nominale di crescita della produzione sia uguale a zero nel l.p. l'inflazione è semplicemente uguale alla crescita dello stock nominale di moneta $\pi=g_m$. Mettendo tutto insieme otteniamo:

$$i=r+\pi=r_n+g_m$$

Nel l.p. il tasso di interesse nominale si muove proporzionalmente all'inflazione e quindi proporzionalmente alla crescita dello stock nominale di moneta. *Nel l.p. la crescita dello stock nominale di moneta si traduce in un tasso di interesse nominale proporzionalmente più elevato* - **"effetto Fisher"**.

4.2.5 Crescita della moneta e saldi monetari reali - *Una maggior crescita dello stock nominale di moneta genera un maggior tasso di interesse nominale, e quindi un maggior costo-opportunità di detenere moneta piuttosto che titoli.* Questo effetto a sua volta induce le persone a ridurre la loro domanda reale di moneta, YL(i). In equilibrio la domanda reale di moneta è

$$\frac{M}{P}=YL(i).$$

Quindi l'offerta reale di moneta deve essere inferiore. Questo significa che il livello dei prezzi deve aumentare rispetto allo stock nominale di moneta, in modo tale che M/P scenda. *Nel l.p. una crescita più elevata dello stock nominale di moneta provoca quindi una riduzione dei saldi reali.*
Quindi: *una crescita più elevata della moneta non ha alcun impatto sulla produzione, né sul tasso di interesse reale. Si riflette interamente in una crescita più elevata dell'inflazione ed in un maggior tasso di interesse nominale.*

4.3 Gli strumenti della politica monetaria

Per analizzare gli strumenti a disposizione delle banche centrali ricordiamo l'espressione dell'offerta di moneta:

$$M=\frac{1+c}{c+\theta}*H$$

M è l'offerta di moneta, definita come M1, la somma del circolante e dei depositi. H è la base monetaria - la somma del circolante e delle riserve detenute dalle banche. Il parametro c è il rapporto circolante/depositi; θ indica il rapporto riserve/depositi. L'espressione $(1+c)/(c+\theta)$ è chiamata **"moltiplicatore della moneta"**. Quindi l'offerta di moneta M è uguale alla base monetaria H per il moltiplicatore della moneta. Le banche centrali hanno tre strumenti a disposizione per controllare M. Il primo, i *vincoli sulle riserve*, influenzano il moltiplicatore sulla moneta. Gli altri due, il *prestito alle banche* e le *operazioni di mercato aperto*, influenzano la base monetaria H.

Vincoli sulle riserve - Ogni banca centrale, determina le riserve obbligatorie, cioè l'ammontare minimo di riserve che le banche devono detenere in proporzione ai depositi in conto corrente. Anche senza tali obblighi, le banche terrebbero comunque delle riserve per essere in grado di soddisfare la domanda di contante da parte dei loro clienti. Tuttavia, generalmente, si impongono vincoli superiori al livello che sceglierebbero liberamente le banche.
Modificando i vincoli sulle riserve le BC cambiano il moltiplicatore della moneta e quindi l'offerta, senza variare la base monetaria. Un aumento del coefficiente di riserva obbligatoria che si traduce in un aumento di θ , comporta una riduzione del moltiplicatore della moneta - una riduzione di $(1+c)/(c+\theta)$ - e quindi una riduzione dell'offerta di moneta. Simmetricamente, una riduzione del coefficiente di riserva obbligatoria, provoca un aumento dell'offerta di moneta. Gli aumenti dei vincoli sulle riserve possono costringere le banche a prendere decisioni drastiche, come ad es. esigere il rimborso di prestiti già accordati. Per questa ragione la BC è diventata sempre più riluttante ad utilizzare i vincoli sulle riserve come strumento di politica macroeconomica.

Prestiti alle banche - La BC può accordare prestiti alla banche. Quanto è disposta a prestare ed a quali condizioni, costituiscono gli elementi della c.d. **"politica di sconto"**. Il tasso al quale la banca centrale presta denaro alle banche è chiamato **tasso di sconto**. La concessione di credito alle banche è molto simile all'acquisto di titoli con una operazione di mercato aperto. In entrambi i casi, la BC crea moneta e quindi aumenta H, la base monetaria. A fronte del prestito concesso, riceve un diritto di credito nei confronti della banca. Nelle operazioni di mercato aperto invece, essa acquista titoli del tesoro, che rappresentano crediti nei confronti del governo.

Fino all'introduzione delle operazioni di mercato aperto negli anni 30 la politica di sconto era il principale strumento di politica monetaria a disposizione della Fed. Da allora il suo ruolo è diminuito a favore delle operazioni di mercato aperto. Generalmente la Fed scoraggia le banche a chiederle prestiti se

non per ragioni legate al ciclo economico stagionale o di breve periodo.
Le variazioni del tasso di sconto sono tuttora rilevanti, ma soprattutto nella misura in cui costituiscono un segnale delle intenzioni della Fed. Ad es. i mercati finanziari generalmente interpretano una riduzione del tasso di sconto come un segnale che la BC ha intenzione di attuare una politica monetaria più espansiva. In questo modo, attraverso un effetto sull'aspettativa dei tassi di interesse futuri attesi, una riduzione del tasso di sconto si riflette in un calo dei tassi di interesse a medio e lungo termine.

Operazioni di mercato aperto - Il terzo strumento a disposizione della BC è costituito dalle operazioni di mercato aperto con le quali essa acquista e vende titoli sul mercato dei titoli. Quando la BC acquista titoli essa paga creando moneta, cioè aumentando H; quando vende titoli riduce H. Nel corso degli anni le operazioni di mercato aperto si sono rivelate lo strumento più adatto e flessibile per variare la base monetaria e quindi l'offerta di moneta, M. Oggi le operazioni di mercato aperto sono lo strumento principale attraverso cui viene condotta la politica monetaria.

4.4 L'approccio di portafoglio al meccanismo di trasmissione[31]

"Nell'IS-LM in economia chiusa (Bagliano Marotta 1999) ed a prezzi fissi, la politica monetaria può esercitare un effetto sulla domanda aggregata mediante variazioni dell'offerta di moneta.
La visione del settore finanziario dell'economia implicita in questo schema si basa sull'assunto di **perfetta sostituibilità** tra le attività finanziarie diverse dalla moneta (titoli di debito ed azioni). Data questa ipotesi è possibile combinare le attività diverse dalla moneta in un unico aggregato con un unico tasso di interesse, il cui livello di equilibrio è determinato dalle scelte degli operatori tra le uniche due attività non perfettamente sostituibili. Le tradizionali motivazioni alla detenzione d i moneta rivestono quindi una importanza centrale nella spiegazione del livello e delle variazioni del tasso di interesse. In tale contesto La politica monetaria può rivelarsi tanto più efficace nell'influenzare la domanda aggregata quanto maggiore è l'elasticità della domanda di moneta al tasso si interesse.

La teoria macroeconomica più recente ha ampliato questa visione studiando altri canali di trasmissione degli impulsi di politica monetaria che hanno effetto sull'economia reale. Operiamo con una estensione dello schema IS-LM, in economia chiusa ed a prezzi fisssi (Tobin Brainard 1968/69), a più attività finanziarie alternative alla moneta ed assunzione di **imperfetta sostituibilità**

31 "Economia Monetaria" Bagliano, Marotta.

fra le attività, che rispondono a tassi e a rischi diversi. Il tasso i, costo opportunità del detenere moneta, è importante perchè da Δi dipende l'efficacia della politica monetaria (Bagliano 1999):

Modello di portafoglio:

	moneta M, rendimento r_m
Attività finanziarie	titoli B, rendimento r_b
	azioni K, rendimento r_k

Le tre attività sono chiaramente distinte grazie all'ipotesi di reciproca sostituibilità imperfetta, dovuta alle diverse caratteristiche in termini di rendimento atteso e di rischio (variabilità delle quotazioni). Esplicitiamo la struttura della domanda e dell'offerta sui mercati delle attività con le ipotesi collegate. La quantità offerta di moneta, titoli ed azioni, pari rispettivamente a M,B e K in termini nominali sono date esogenamente. Il portafoglio finanziario dell'economia W o "ricchezza complessiva" è data dalla somma, in termini reali, delle offerte delle attività:

$$\frac{W}{p}=\frac{M+B+K}{p}.$$

Noi vediamo come si muovono i rendimenti r al variare della offerta esogena. Per ciascuna attività finanziaria si può dire che la domanda dipende dai tassi di rendimento r, dal livello del reddito y (da esso dipendono i consumi) e dalla ricchezza complessiva $\frac{W}{P}$. Dal punto di vista microeconomico, tali funzioni sono derivabili dalla soluzione di un semplice problema di **allocazione ottima del portafoglio** da parte di un investitore avverso al rischio, per data struttura dei rendimenti attesi sulle varie attività e delle loro varianza e covarianze. Le tre funzioni di domanda simmetriche dipendono positivamente dal tasso di rendimento proprio e negativamente dai tassi di rendimento delle altre attività. Inoltre la domanda per tutte le attività cresce al crescere della ricchezza, mentre un aumento del reddito (a parità di ricchezza) determina un aumento della moneta domandata per scopi transattivi ed una diminuzione della domanda di titoli ed azioni. Questo insieme di ipotesi permette di attribuire un segno preciso alle derivate parziali delle funzioni di domanda di attività rispetto a ciascuna delle loro determinanti. Uguagliando su ciascun mercato l'offerta esogena alla funzione di domanda otteniamo le seguenti equazioni che descrivono l'equilibrio sui tre mercati delle attività:

$$\frac{M}{P}=m(r_M, r_B, r_K, y, \frac{W}{P}) \quad (4.1)$$

$$\frac{B}{P}=b(r_M,r_B,r_K,y,\frac{W}{P}) \quad (4.2)$$
$$\frac{K}{P}=k(r_M,r_B,r_K,y,\frac{W}{P}) \quad (4.3)$$

Il vincolo costituito dalla definizione di ricchezza garantisce, per la **legge di Walras,** che, quando due mercati sono in equilibrio, lo è anche il terzo":

$$\frac{W}{P}=\frac{M+B+K}{P}=m(.)+b(.)+k(.)$$

Vincoli di additività - "L'interdipendenza che esiste tra le domande per le varie attività finanziarie pone alcuni vincoli su m,b e k a variazioni in ciascuna delle loro determinanti se denotiamo con m_M, m_B, m_K, m_y, e m_W le derivate parziali della funzione di domanda di moneta m(.) rispetto ai rendimenti r_M, r_B e r_K, al reddito y ed alla ricchezza $\frac{W}{P}$ (definizioni analoghe valgono per le funzioni di domanda di titoli ed azioni. Possiamo esprimere questi vincoli di additività nel modo seguente

$$m_W+b_W+k_W=1 \quad (4.4)$$
$$m_y+b_y+k_y=0 \quad (4.5)$$
$$m_M+b_M+k_M=0 \quad (4.6)$$
$$m_B+b_B+k_B=0 \quad (4.7)$$
$$m_K+b_K+k_K=0 \quad (4.8)$$

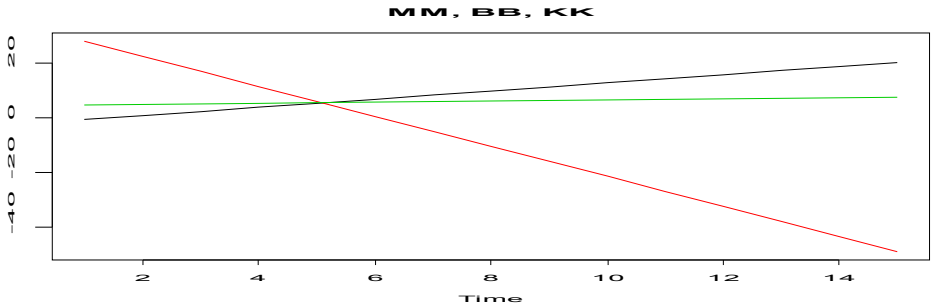
Secondo la 4.4 un'unità aggiuntiva di ricchezza viene completamente allocata tra le tre attività finanziarie, mentre la 4.5 indica che la variazione di domanda di moneta, a seguito di una variazione unitaria del reddito (a parità di ricchezza), deve essere "finanziata" da una variazione di segno opposto della domanda per le altre due attività. Gli ultimi tre vincoli riguardano la risposta delle domande a variazioni dei tassi di rendimento: a parità di ricchezza, variazioni di un tasso di rendimento determinano aggiustamenti nella domanda di tutte le attività finanziarie, modificando la composizione del portafoglio stesso, ma non la sua dimensione complessiva. A questo riguardo è importante notare che, al variare del tasso di rendimento su un'attività, la risposta della domanda di quella stessa attività uguaglia (in valore assoluto) la somma delle risposte di tutte le domande per altre attività (ad esempio nel caso del rendimento sui titoli, dalla 4.7, $b_B=-(m_B+k_B)$)
L'effetto sulla domanda nel mercato in cui il rendimento è variato è dunque più forte della reazione su ciascuno degli altri mercati (nell'esempio $b_B>-m_B$ e $b_B>-k_B$)".

Ipotesi semplificatrici - Per rendere più agevole l'analisi delle interdipendenze fra i mercati finanziari in risposta a

provvedimenti di politica monetaria che fanno variare esogenamente la quantità di moneta, si introducono alcune ipotesi semplificatrici.

- "Il legame fra mercati finanziari ed economia reale è rappresentato dal tasso di rendimento delle azioni r_K, visto come il rendimento che le imprese devono offrire agli azionisti per indurli a detenere le azioni emesse e quindi come misura del costo di finanziamento degli investimenti, che si suppone siano interamente finanziati con azioni. In presenza di una funzione di investimento definita da $I(r_K)$, con $I'(r_K)<0$, il tasso r_K trasmette gli impulsi di politica monetaria alla domanda aggregata e svolge la stessa funzione del tasso d'interesse sui "titoli" nel modello *IS-LM.*
- Variazioni nei tassi di rendimento di titoli ed azioni modificano il valore di mercato di tali attività data la relazione inversa che lega quotazioni e tassi di rendimento: l'ammontare nominale della ricchezza finanziaria muta quindi al variare dei tassi. Tali effetti di rivalutazione complicherebbero tuttavia l'analisi senza mutarne le conclusioni qualitative (W indipendente dai movimenti dei tassi di rendimento).
- Consideriamo esogeno e costante il tasso di rendimento sulla moneta, attività priva di rischio (risk free) rispetto alle altre sia perchè se intesa come contante ha un rendimento nominale nullo, sia perchè se ci si riferisce ad un aggregato più ampio include depositi assicurati, per cui il suo valore nominale è predeterminato: $r_M<r_B,r_K$. La disuguaglianza implica che la moneta è una attività dominata dalle altre in termini di rendimento atteso".

"Adottando queste ipotesi si può descrivere l'equilibrio congiunto sui mercati finanziari, mediante le tre condizioni di equilibrio 4.1, 4.2, 4,3 con y ed r_M dati. I tassi di rendimento di titoli ed azioni r_B e r_K sono endogenamente determinati, per un dato livello della ricchezza totale W e dell'offerta delle varie attività dalle condizioni di equilibrio sui mercati.
La curva MM (rossa) mostra le combinazioni dei tassi sui titoli ed azioni in corrispondenza dei quali domanda ed offerta di moneta (esogena) si uguagliano.



L'inclinazione relativa della curva si giustifica notando che un aumento di r_K provoca una diminuzione della domanda di moneta; per ristabilire l'equilibrio sul mercato monetario è necessaria una riduzione anche del tasso sui titoli r_B. L'equilibrio sul mercato dei titoli è rappresentato dalla curva BB (verde) positivamente inclinata: all'aumentare di r_B, la conseguente maggiore domanda di titoli rende necessario un aumento anche del tasso r_K per riportare all'equilibrio il mercato. Un ragionamento analogo giustifica la pendenza positiva della curva di equilibrio sul mercato azionario KK (nera). L'inclinazione relativa delle curve BB e KK si spiega ricordando dai vincoli di additività visti sopra che variazioni del tasso su una certa attività determinano effetti più ampi sulla domanda per quella stessa attività rispetto a quelli sulle domande per le altre attività in portafoglio. Partendo dalla situazione di equilibrio su tutti i mercati individuata nel punto di incontro delle curve), un incremento di r_B ha un effetto relativamente forte sul mercato dei titoli, dove aumenta la domanda, e più debole sul mercato azionario, dove la domanda diminuisce. Per riportare in equilibrio quest'ultimo mercato è quindi sufficiente un aumento di r_k minore di quello necessario per ristabilire l'equilibrio sul mercato dei titoli: di qui la minore inclinazione della curva BB rispetto alla KK"[32].

$$m_B dr_B + m_K dr_K = 0 \rightarrow \frac{dr_B}{dr_K}_{MM} = \frac{-m_K}{m_B} < 0$$

$$b_B dr_B + b_K dr_K = 0 \rightarrow \frac{dr_B}{dr_K}_{BB} = \frac{-b_K}{b_B} < 0$$

$$m_B dr_B + m_K dr_K = 0 \rightarrow \frac{dr_B}{dr_K}_{KK} = \frac{-k_K}{k_B} < 0$$

Effetti della politica monetaria – "Nel modello che stiamo considerando la quantità di moneta può essere modificata in due modi, con effetti diversi sul rendimento di titoli ed azioni e, attraverso quest'ultimo, sulla domanda aggregata. Riferendoci al caso di espansione monetaria, la quantità addizionale di moneta può essere immessa nel sistema senza alterare l'offerta delle altre attività finanziarie (espansione monetaria pura) e quindi aumentando la ricchezza finanziaria complessiva dell'economia, oppure mediante un acquisto di titoli sul mercato (operazione di mercato aperto)che lascia invariata W modificandone solo la composizione".

Espansione monetaria pura – "Poiché in questo caso l'aumento della quantità di moneta, dM, non è accompagnato dalla diminuzione dello stock esistente di titoli o di azioni, la ricchezza finanziaria complessiva aumenta nella stessa misure W = dM > 0. Sul mercato monetario l'aumento dell'offerta è compensato solo parzialmente attraverso l'effetto della aumentata ricchezza (con

32 Le derivate parziali sono calcolate tutte nel punto di equilibrio

$m_W<1$), da un aumento della domanda, generando, a tassi r_W e r_K invariati, una situazione di eccesso di moneta. Per ristabilire l'equilibrio è quindi necessaria una riduzione dei rendimenti su titoli e/o azioni tali da stimolare la domanda di moneta. Questo effetto si traduce in uno spostamento verso il basso della curva fino alla nuova posizione.
L'aumento della ricchezza comporta anche uno squilibrio sul mercato dei titoli dove si verifica un eccesso di domanda eliminato da una riduzione di r_B a parità di r_K (poiché $b_B>0$ e $b_K<0$). Graficamente, la curva BB subisce uno spostamento verso il basso. Per la **"legge di Walras"**, la curva KK, che esprime l'equilibrio sul terzo mercato, deve spostarsi in modo da passare per il nuovo punto di equilibrio: l'aumento della ricchezza crea un eccesso di domanda che richiede una riduzione del rendimento azionario od un aumento del tasso sui titoli per ristabilire l'equilibrio. *L'effetto finale della crescita monetaria è quindi una discesa generalizzata dei tassi con conseguente impulso espansivo della domanda aggregata".*

Utilizzando l'eguaglianza $dM=-dB>0$ otteniamo:

$$MM: m_B dr_B + m_K dr_K = (1-m_W)\,dM$$

$$BB: b_B dr_B + b_K dr_K = -b_W dM\,,$$

il sistema risolto da come risultato

$$\frac{dr_B}{dM} = \frac{(1-m_W)b_K + m_K b_W}{\Delta}$$
$$\frac{dr_K}{dM} = \frac{m_B b_W - (1-m_W)b_B}{\Delta}$$

con $\Delta = m_B b_K - m_K b_B > 0.$

Operazioni di mercato aperto – "Se la moneta addizionale viene immessa nel sistema attraverso una operazione di mercato aperto, ad un aumento di M corrisponde un uguale diminuzione di B, con ricchezza complessiva invariata: dM = -dB>0.
Non essendovi un effetto ricchezza sulla domanda, ora l'eccesso di offerta sul mercato monetario è più ampio rispetto al caso precedente e ciò si riflette in un maggiore spostamento verso il basso della MM.
Anche sul mercato dei titoli lo squilibrio causato dall'operazione di mercato aperto è più pronunciato di espansione monetaria pura. Si tratta qui di un eccesso di domanda che determina un maggiore spostamento verso il basso della BB. Quanto al terzo mercato la curva KK non subisce in questo caso spostamenti dal momento che la ricchezza complessiva e lo stock di azioni sono rimasti inalterati. *L'effetto di una operazione di mercato aperto è dunque nuovamente una discesa generalizzata dei rendimenti.*

$$MM: m_B dr_B + m_K dr_K = dM$$
$$BB: b_B dr_B + b_K dr_K = -dM$$

Risolvendo il sistema si ricava

$$\frac{dr_B}{dM} = \frac{b_k + m_K}{\Delta} < 0 \quad e \quad \frac{dr_K}{dM} = \frac{m_B + b_B}{\Delta} < 0$$

Se la diminuzione del rendimento sulle azioni sia in questo caso maggiore o minore dipende dalle varie elasticità della domanda di moneta e titoli ai rendimenti ed alla ricchezza. Graficamente, in un caso la stessa curva KK passa per diversi punti di equilibrio dei mercati; nel'altro, la curva si sposta. Poiché è il rendimento sulle azioni a costituire il legame con il settore reale, non si è in grado di determinare a priori in merito alla maggiore forza espansiva di una politica monetaria condotta con operazioni di mercato aperto rispetto al caso di una espansione monetaria "pura". Questo risultato costituisce una differenza rispetto al semplice modello IS-LM, dove una operazione di mercato aperto, non provocando aumenti della domanda di moneta a causa dell'aumentata ricchezza complessiva, ha un effetto sicuramente più espansivo sull'economia. La conclusione principale del'analisi appena svolta è che *un provvedimento di politica monetaria, attraverso riallocazioni del portafoglio di attività degli investitori, ha effetti su diversi mercati finanziari, determinando vriazioni in un'ampia gamma di prezzi e tassi di rendimento, e la forza relativa di tali effetti dipende dal grado di sostituiilità dei vari strumenti finanziari nei portafogli degli agenti.*
Inoltre, considerando un sistema finanziario più articolato, la politica monetaria può avere effetti reali anche nel caso estremo di **trappola della liquidità**. Nel contesto del modello IS-LM si indica con questo termine una situazione in cui in corrispondenza di un tasso di interesse talmente basso che le aspettative degli operatori sono solo in direzione di un rialzo, e quindi di un calo delle quotazioni dei titoli, moneta e titoli diventano perfetti sostitui. La politica monetaria perde quindi efficacia in quanto aumenti della quantità di moneta vengono assorbiti nei portafogli a parità di tasso di interesse, senza trasmettere alcun impulso espansivo alla domanda aggregata.
Nell'approccio di portafoglio, con più attività invece, anche se l'aumento dello stock di moneta non modifica il tasso di rendimento dei titoli, la politica monetaria può avere comunque effetti sulla spesa attraverso variazioni nei rendimenti di altre attività finanziarie, solo imperfettamente sostituibili a moneta e titoli nei portafogli degli agenti. Soltanto un'irrealistica situazione di sostituibilità perfetta generalizzata a tutte le attività finanziarie riprodurrebbe in questo contesto più complesso il risultato di assoluta inefficacia ottenuto nel più semplice schema IS-LM".

Osservazioni – La considerazione esplicita delle interdipendenze fra mercati ha alcune ulteriori rilevanti implicazioni:

- alterazioni della struttura dei rendimenti, con effetti sulla domanda aggregata di beni possono essere determinate da variazioni nell'offerta di attività finanziaria diversa dalla moneta;
- variazioni nelle condizioni di domanda delle attività finanziarie a parità di stock offerti, possono avere effetto sull'intera struttura dei rendimenti;
- la configurazione finale di equilibrio dei rendimenti su titoli ed azioni dipende dal grado di sostituibilità tra le attività finanziarie.

4.5 Domanda di moneta ed inflazione[33]

"Uno dei vantaggi della cointegrazione (Verbeek 2006) in modelli per serie storiche multivariate è che essa può contribuire a migliorare le previsioni, perchè le previsioni generate da un sistema cointegrato sono fra loro collegate grazie all'esistenza di una o più relazioni di lungo periodo. Di solito questo vantaggio diventa apprezzabile quando la previsione riguarda periodi relativamente lontani nel tempo (si veda Engle e Yoo, 1987). Hoffman e Rasche (1996) e Lin e Tsay (1996) hanno esaminato da un punto di vista empirico i risultati di previsione di un sistema cointegrato. In questo paragrafo, basato sullo studio di Hoffman e Rasche, consideriamo un esempio empirico che riguarda un processo multivariato con 5 componenti".

"L'analisi empirica è basata su osservazioni trimestrali relative agli Stati Uniti e per il periodo 1954:1 – 1994:4 (T = 164) delle variabili seguenti:

- m_t: Logaritmo della quantità di moneta M1 in termini reali;
- $infl_t$: Tasso di inflazione trimetstrale (percentuale annua);
- cpr_t: Rendimento obbligazionario;
- y_t: Logaritmo del PIL reale (in miliardi di dollari 1987);
- tbr_t: Randimento dei titoli di stato a breve scadenza.

Le variabili *cpr* e *tbr* sono rispettivamente interpretate come il rendimento rischioso e non rischioso su un orizzonte trimestrale. Le serie di M1 e del PIL sono destagionalizzate".

```
> dati <- read.csv("C:\\R\\Cointg.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1] "OBS"  "cpr"  "infl" "m"    "tbr"  "y"
```

33 Dati e definizioni Verbeek "Econometria"

"Anche se è possibile mettere in discussione la presenza di una radice unitaria in qualcuna di queste serie, seguiremo l'approccio di Hoffman e Rasche (1996), supponendo che queste cinque variabili siano tutte ben descritte da un processo *I*(1)". L'ADF sembra confermare la stazionerietà in differenze prime per m,

```
> library(urca)
>  summary(ur.df(diff(m)))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################


Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
       Min         1Q     Median         3Q        Max
-0.0266282 -0.0051190  0.0009935  0.0052469  0.0318826

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.29070    0.06601  -4.404 1.95e-05 ***
z.diff.lag -0.19564    0.07770  -2.518   0.0128 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.008819 on 159 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2125,     Adjusted R-squared: 0.2026
F-statistic: 21.45 on 2 and 159 DF,  p-value: 5.658e-09


Value of test-statistic is: -4.4036

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

per infl,

```
> summary(ur.df(diff(infl)))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none
```

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-5.373827 -0.851248 -0.004055  0.950887  4.109162

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -1.79287    0.13409 -13.371  < 2e-16 ***
z.diff.lag  0.20366    0.07767   2.622  0.00959 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.485 on 159 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7551,     Adjusted R-squared: 0.752
F-statistic: 245.1 on 2 and 159 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic is: -13.3707

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

per cpr,

> summary(ur.df(diff(cpr)))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.24374 -0.35247  0.07995  0.39227  4.09833

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -1.04583    0.09637 -10.852  < 2e-16 ***
z.diff.lag  0.29907    0.07588   3.941 0.000121 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.8893 on 159 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared: 0.4543,     Adjusted R-squared: 0.4474
F-statistic: 66.19 on 2 and 159 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic is: -10.8517

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

per y,

> summary(ur.df(diff(y)))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.028260 -0.002512  0.002267  0.007567  0.029060

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.32503    0.07158  -4.541 1.10e-05 ***
z.diff.lag -0.23953    0.07688  -3.116  0.00218 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.009444 on 159 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2597,     Adjusted R-squared: 0.2504
F-statistic: 27.89 on 2 and 159 DF,  p-value: 4.159e-11


Value of test-statistic is: -4.5406

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

per tbr,
```

```
> summary(ur.df(diff(tbr)))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.2176 -0.2977  0.0482  0.4142  3.7154

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -1.02713    0.09661 -10.632  < 2e-16 ***
z.diff.lag  0.28392    0.07628   3.722 0.000274 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.7751 on 159 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4465,     Adjusted R-squared: 0.4395
F-statistic: 64.12 on 2 and 159 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic is: -10.6317

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

con tutti i valori sotto soglia.
Il KPSS sembra essere più restrittivo rigurado la serie della quantità di moneta (m)

```
> summary(ur.kpss(diff(m)))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.5959

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

```
> summary(ur.kpss(diff(infl)))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.0924

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739

> summary(ur.kpss(diff(cpr)))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.0753

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739

> summary(ur.kpss(diff(y)))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.1354

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739

>  summary(ur.kpss(diff(tbr)))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.0969
```

```
Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

con un 0.5959 sopra soglia. Gli altri valori (infl, cpr, tbr,) sono tutti sotto soglia.

"A priori è possibile immaginare tre possibili relazioni di cointegrazione che governano l'evoluzione di queste variabili nel lungo periodo. In primo luogo, possiamo specificare un'equazione per la *domanda di moneta*,

$$m_t = \alpha_1 + \beta_{14} y_t + \beta_{15} tbr_t + \epsilon_{1t},$$

dove $\beta_{14} = 1$ indica l'elasticità al reddito, e β_{15} quella al tasso d'interesse. E' ragionevole attendersi che β_{14} sia prossimo a uno, il che corrisponde a un'elasticità al reddito unitaria, e che $\beta_{15} < 0$. Se il tasso d'interesse *reale* è stazionario, inoltre, possiamo aspettarci che un'altra relazione di cointegrazione sia data da

$$infl_t = \alpha_2 + \beta_{25} tbr_t + \epsilon_{2t}$$

con $\beta_{25} = 1$. Questa espressione è chiamata **relazione di Fisher**, tenendo presente che l'inflazione osservata è usata con approssimazione dell'inflazione attesa. Infine, è ragionevole ritenere che il premio per il rischio, misurato dalla differenza fra il rendimento obbligazionario e quello sui titoli di Stato a breve termine, sia stazionario; in questo caso la terza relazione di cointegrazione è data da

$$cpr_t = \alpha_3 + \beta_{35} tbr_t + \epsilon_{3t}$$

con $\beta_{35} = 1$ ".

Prima di procedere alla specificazione del processo multivariato di queste variabili, consideriamo le stime OLS delle tre regressioni precedenti

```
> reg1 <- lm(m ~ y + tbr)
> summary(reg1)

Call:
lm(formula = m ~ y + tbr)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.141931 -0.036745 -0.001974  0.044776  0.147458

Coefficients:
```

```
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.188591   0.122285   26.07   <2e-16 ***
y            0.422755   0.015903   26.58   <2e-16 ***
tbr         -0.031172   0.001879  -16.59   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.05769 on 161 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.815,      Adjusted R-squared: 0.8127
F-statistic: 354.6 on 2 and 161 DF,  p-value: < 2.2e-16

> reg2 <- lm(infl ~ tbr)
> summary(reg2)

Call:
lm(formula = infl ~ tbr)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.8222 -1.4433 -0.2281  1.1153  6.9737

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.15799    0.33322   3.475 0.000655 ***
tbr          0.55827    0.05278  10.578  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.98 on 162 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4085,     Adjusted R-squared: 0.4049
F-statistic: 111.9 on 1 and 162 DF,  p-value: < 2.2e-16

> reg3 <- lm(cpr ~ tbr)
> summary(reg3)

Call:
lm(formula = cpr ~ tbr)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.85555 -0.23869 -0.07406  0.12861  2.47128

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.46126    0.06533    7.06 4.63e-11 ***
tbr          1.03795    0.01035  100.31  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.3882 on 162 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9842,     Adjusted R-squared: 0.9841
```

```
F-statistic: 1.006e+04 on 1 and 162 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Si noti che gli standard error OLS non sono validi se le variabili nella regressione sono integrate. Con l'eccezione dell'equazione per il premio per il rischio, gli R^2 non sono prossimi a 1; si ricordi che questa proprietà rappresenta un requisito informale per una regressione di cointegrazione.

Possiamo verificare la presenza di una radice unitaria nei residui di queste regressioni usando i test di Dickey-Fuller estesi.

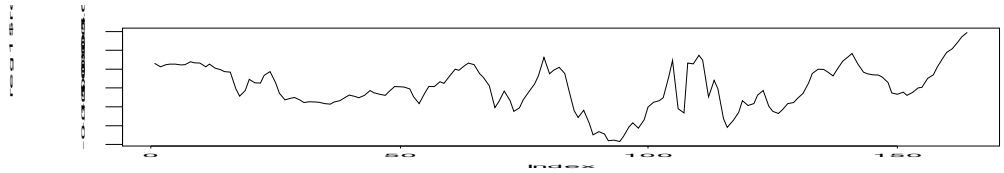
```
> summary(ur.df(reg1$resid))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.126979 -0.009412  0.002652  0.013594  0.126801
Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.10612    0.03624  -2.929   0.0039 **
z.diff.lag  0.16793    0.07930   2.118   0.0357 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.02499 on 160 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.06191,    Adjusted R-squared: 0.05018
F-statistic:  5.28 on 2 and 160 DF,  p-value: 0.006019


Value of test-statistic is: -2.9286

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

> summary(ur.df(reg2$resid))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none
```

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.99904 -1.03688 -0.09128  0.89639  4.77391

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.24394    0.06585  -3.704 0.000292 ***
z.diff.lag -0.36801    0.07400  -4.973 1.68e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.475 on 160 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3003,     Adjusted R-squared: 0.2915
F-statistic: 34.33 on 2 and 160 DF,  p-value: 3.927e-13


Value of test-statistic is: -3.7043

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

> summary(ur.df(reg3$resid))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.78801 -0.15370 -0.04812  0.10861  1.57566

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.41488    0.06553  -6.331 2.35e-09 ***
z.diff.lag  0.16415    0.07769   2.113   0.0362 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.2929 on 160 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2017,     Adjusted R-squared: 0.1917
F-statistic: 20.21 on 2 and 160 DF,  p-value: 1.493e-08
```

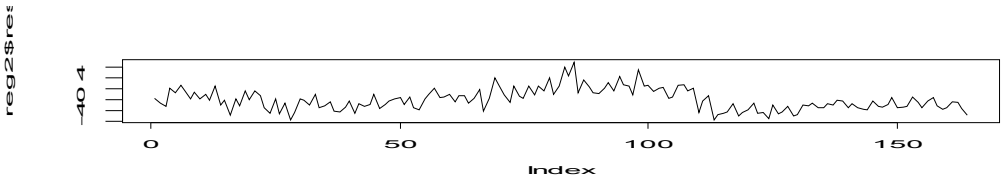
```
Value of test-statistic is: -6.3313

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

I risultati non sono molto sensibili al numero di ritardi inclusi nelle regressioni dei test.
L'evidenza empirica a proposito dell'ipotesi di esistenza per le cinque variabili prese in considerazione, delle relazioni di cointegrazione elencate in precedenza è abbastanza ambigua. L'equazione del premio per il rischio è l'unica per la quale otteniamo un R al quadrato prossimo a uno; l'ADF dei residui rifiuta nettamente l'ipotesi nulla. "I residui possono essere interpretati come deviazioni dall'equilibrio di lungo periodo; per questa ragione dovrebbero oscillare attorno allo zero ed essere stazionari. Anche se un semplice esame visivo di questi grafici fornisce indicazioni ambigue, è legittimo sostenere sulla base di queste figure (di seguito riportate) che i residui delle regressioni della domanda di moneta e del premio siano stazionari. Nel caso dell'equazione di Fisher, il periodo campionario considerato fornisce indicazioni meno chiare per quanto riguarda la tendenza a tornare verso un valore medio".

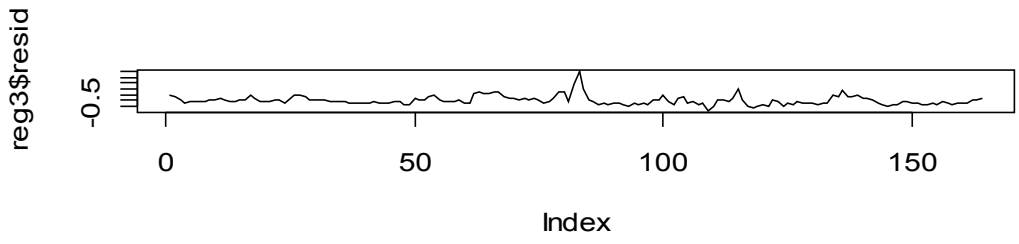
```
> plot(reg1$resid, type = "l")
```



```
> plot(reg2$resid, type = "l")
```




```
> plot(reg3$resid, type = "l")
```



Applicazione test di Joahnasen

"Il primo passo della procedura di Johansen consiste nel verificare ipotesi sul rango di cointegrazione r. Per calcolare le due statistiche di test λ_{max} e $\lambda_{traccia}$, dobbiamo scegliere l'ordine di ritardo massimo del modello autoregressivo multivariato. Una scelta di p troppo bassa comporta la perdita di validità dei test, mentre un valore p troppo elevato ne provoca una perdita di potenza".

Riportiamo i risultati dei test del rango di cointegrazione per p = 5 e p = 6 (K=4 e K=5 per i sottolivelli), che continuano a mostrare una certa dipendenza dall'ordine di ritardo del modello autoregressivo multivariato adottato, anche se da un punto di vista qualitativo le conclusioni cambiano di poco. Tutti i test rifiutano l'ipotesi nulla di nessuna relazione di cointegrazione. Per un livello del 5% e dell'1% si accetta r<=1. I test dell'ipotesi nulla r = 2 sembrano complessivamente confermare. Come in precedenza, dobbiamo scegliere il rango di cointegrazione sulla base di questi risultati.

"La scelta più naturale sembra essere r = 2, ma anche r = 3 potrebbe rappresentare una decisione accettabile" (Hoffman e Rasche, 1996)".

```
> cointegrazione <- ca.jo(cbind(m, infl, cpr, y, tbr), type= "eigen", ecdet = "none", K=4, spec= "transitory")
>  summary(cointegrazione)

######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , with linear trend

Eigenvalues (lambda):
[1]    0.2199263829    0.1362263099    0.0637362390    0.0384343394
0.0003508511

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct  1pct
r <= 4 |  0.06  6.50  8.18 11.65
r <= 3 |  6.27 12.91 14.90 19.19
r <= 2 | 10.54 18.90 21.07 25.75
r <= 1 | 23.43 24.78 27.14 32.14
r = 0  | 39.74 30.84 33.32 38.78

Eigenvectors, normalised to first column:
(These are the cointegration relations)
```

```
               m.l1     infl.l1     cpr.l1        y.l1      tbr.l1
m.l1     1.00000000  1.00000000  1.0000000  1.00000000  1.00000000
infl.l1  0.02595032  0.02165725  0.3269366 -0.03503379 -0.01375346
cpr.l1  -0.15348534  0.24570587 -0.3525570 -0.01868190 -0.06484326
y.l1    -0.48400712 -0.45629606 -1.1516087 -0.72965697 -0.01983134
tbr.l1   0.18964822 -0.22046629  0.1058256  0.07968899  0.05841879

Weights W:
(This is the loading matrix)

               m.l1     infl.l1       cpr.l1         y.l1
m.d    -0.008369529 -0.02195711 -0.001166862 -0.005831179
infl.d -6.866619292  1.68398135  0.085917700  0.675584469
cpr.d   2.486238956 -0.81540026  0.233723268 -0.334778894
y.d    -0.042294128 -0.01626537  0.001960482  0.001599404
tbr.d   0.921747282 -0.27582767  0.213368793 -0.587801631

tbr.l1
-0.0000658028
0.1514356429
0.0525556454
-0.0002775627
0.0329754729

> beta <- cointegrazione@V[,1]
> Yl1 <- cointegrazione@ZK
>  beta.Yl1 <- t(beta %*% t(Yl1))
>  summary(ur.df(beta.Yl1))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.242368 -0.034352 -0.001138  0.041016  0.170949

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.0004226  0.0019205  -0.220   0.8261
z.diff.lag -0.1775140  0.0787215  -2.255   0.0255 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

```
Residual standard error: 0.06595 on 156 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.03188,    Adjusted R-squared: 0.01947
F-statistic: 2.569 on 2 and 156 DF,  p-value: 0.07988


Value of test-statistic is: -0.22

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

> summary(ur.kpss(beta.Yl1))


#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.1051

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739

Proviamo la procedura con sei ritardi (K=5 nei sottolivelli)

> cointegrazione <- ca.jo(cbind(m, infl, cpr, y, tbr), type=
"eigen", ecdet = "none", K=5, spec= "transitory")
>  summary(cointegrazione)

######################
# Johansen-Procedure #
######################

Test type: maximal eigenvalue statistic (lambda max) , with linear
trend

Eigenvalues (lambda):
[1] 0.188773849 0.153341596 0.051048317 0.048175365 0.003357922

Values of teststatistic and critical values of test:

          test 10pct  5pct  1pct
r <= 4 |  0.53  6.50  8.18 11.65
r <= 3 |  7.85 12.91 14.90 19.19
r <= 2 |  8.33 18.90 21.07 25.75
r <= 1 | 26.47 24.78 27.14 32.14
r = 0  | 33.26 30.84 33.32 38.78
```

```
Eigenvectors, normalised to first column:
(These are the cointegration relations)

               m.l1     infl.l1      cpr.l1         y.l1
m.l1     1.00000000  1.00000000  1.00000000  1.000000000
infl.l1  0.02703416  0.02289531  0.17068021 -0.042386951
cpr.l1  -0.19852976  0.15464784 -0.20984524 -0.001907109
y.l1    -0.47782318 -0.45653071 -0.77245996 -1.071293926
tbr.l1   0.23386852 -0.12805012  0.06002642  0.099289445

tbr.l1
1.00000000
-0.03423874
-0.03627042
-0.16169346
0.05544354

Weights W:
(This is the loading matrix)

               m.l1     infl.l1       cpr.l1          y.l1
m.d     0.003529805 -0.02960911 -0.002173626 -0.0039232287
infl.d -7.955461287  0.63776816  0.256016949  0.1164946431
cpr.d   2.092232536 -0.75877324  0.324419697 -0.4298871291
y.d    -0.027466979 -0.02883725  0.002597848  0.0003123934
tbr.d   0.668111566 -0.08630184  0.266627320 -0.5540925382


tbr.l1
-0.0005474312
0.5029220622
0.0771582775
-0.0017146698
-0.0063409131

> beta <- cointegrazione@V[,1]
> Yl1 <- cointegrazione@ZK
> beta.Yl1 <- t(beta %*% t(Yl1))
>  summary(ur.df(beta.Yl1))

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression none


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
```

```
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.274383 -0.038951  0.001502  0.040605  0.219571

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1    -0.0005885  0.0022438  -0.262   0.7935
z.diff.lag -0.1541432  0.0793285  -1.943   0.0538 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.07734 on 155 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.02426,    Adjusted R-squared: 0.01167
F-statistic: 1.927 on 2 and 155 DF,  p-value: 0.1491

Value of test-statistic is: -0.2623

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

> summary(ur.kpss(beta.Yl1))

#######################
# KPSS Unit Root Test #
#######################

Test is of type: mu with 4 lags.

Value of test-statistic is: 0.1259

Critical value for a significance level of:
                10pct  5pct 2.5pct  1pct
critical values 0.347 0.463  0.574 0.739
```

L'ADF ed il KPSS hanno valori discordanti riguardo la stazionarietà di B yt-1: il KPSS sembra confermare e l'ADF smentire.

“Se imponiamo il vincolo che il rango della matrice di lungo periodo sia pari a due, possiamo stimare per massima verosimiglianza i vettori di cointegrazione e il modello a correzione d'errore seguendo l'approccio di Johansen. *Si ricordi che da un punto di vista statistico ciò che è identificato dal campione non sono i singoli vettori di cointegrazione, ma lo* ***spazio*** *da loro individuato.* Per identificare le singole relazioni di cointegrazione è dunque necessario **normalizzare** in qualche modo i vettori di cointegrazione. Quando r = 2, è necessario imporre due vincoli di normalizzazione su ciascun vettore. Si noti che sulle regressioni di cointegrazione precedenti sono stati imposti a priori alcuni vincoli, come ad esempio un coefficiente -1 per le variabili al primo membro, e vincoli di nullità per i coefficienti

di qualcuna delle altre variabili". Per K=5 la stima del VECM è la seguente

```
> stima.coint <- cajools(cointegrazione)
> summary(stima.coint)
Response m.d :

Call:
lm(formula = substitute(m.d), data = data.mat)

Residuals:
       Min          1Q      Median          3Q         Max
-1.593e-02 -4.267e-03  5.951e-05  4.029e-03  1.796e-02

Coefficients:

            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant   0.0793373  0.0503497   1.576  0.11746
m.dl1      0.3074494  0.0940666   3.268  0.00138 **
infl.dl1   0.0008803  0.0006079   1.448  0.14996
cpr.dl1    0.0026420  0.0027332   0.967  0.33547
y.dl1     -0.0975423  0.0824479  -1.183  0.23889
tbr.dl1   -0.0087407  0.0031457  -2.779  0.00625 **
m.dl2      0.1290553  0.1025449   1.259  0.21041
infl.dl2   0.0007668  0.0006259   1.225  0.22270
cpr.dl2    0.0034009  0.0025562   1.330  0.18565
y.dl2      0.0425311  0.0803153   0.530  0.59731
tbr.dl2   -0.0034456  0.0030857  -1.117  0.26617
m.dl3      0.0663484  0.1040126   0.638  0.52464
infl.dl3   0.0005003  0.0005937   0.843  0.40100
cpr.dl3    0.0003552  0.0022324   0.159  0.87383
y.dl3     -0.0510821  0.0783192  -0.652  0.51538
tbr.dl3   -0.0021913  0.0025720  -0.852  0.39575
m.dl4     -0.0167559  0.0910527  -0.184  0.85428
infl.dl4   0.0001588  0.0004341   0.366  0.71505
cpr.dl4    0.0023307  0.0020920   1.114  0.26726
y.dl4      0.0279006  0.0748988   0.373  0.71011
tbr.dl4   -0.0032296  0.0025504  -1.266  0.20762
m.l1      -0.0327236  0.0155543  -2.104  0.03728 *
infl.l1   -0.0007684  0.0004922  -1.561  0.12085
cpr.l1    -0.0047963  0.0025850  -1.855  0.06575 .
y.l1       0.0178013  0.0075827   2.348  0.02037 *
tbr.l1     0.0040666  0.0028050   1.450  0.14948
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.006736 on 133 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7222,     Adjusted R-squared: 0.6679
F-statistic:  13.3 on 26 and 133 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
Response infl.d :

Call:
lm(formula = substitute(infl.d), data = data.mat)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.52141 -0.87475  0.02509  0.77770  3.53694

Coefficients:
          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant  17.64564   10.23385   1.724  0.08699 .
m.dl1     41.58417   19.11955   2.175  0.03140 *
infl.dl1  -0.53319    0.12356  -4.315 3.09e-05 ***
cpr.dl1   -0.93879    0.55553  -1.690  0.09339 .
y.dl1     11.97720   16.75798   0.715  0.47604
tbr.dl1    1.79417    0.63937   2.806  0.00577 **
m.dl2     33.45222   20.84280   1.605  0.11087
infl.dl2  -0.22924    0.12721  -1.802  0.07381 .
cpr.dl2   -0.57763    0.51956  -1.112  0.26824
y.dl2    -20.95027   16.32452  -1.283  0.20160
tbr.dl2    1.03117    0.62719   1.644  0.10252
m.dl3    -10.06925   21.14112  -0.476  0.63465
infl.dl3  -0.16259    0.12068  -1.347  0.18020
cpr.dl3   -0.38017    0.45374  -0.838  0.40362
y.dl3     -3.32252   15.91879  -0.209  0.83499
tbr.dl3    1.16984    0.52277   2.238  0.02690 *
m.dl4    -16.64971   18.50696  -0.900  0.36993
infl.dl4  -0.04665    0.08824  -0.529  0.59790
cpr.dl4   -0.09724    0.42522  -0.229  0.81946
y.dl4    -20.20711   15.22359  -1.327  0.18667
tbr.dl4    0.47986    0.51838   0.926  0.35629
m.l1      -6.44226    3.16150  -2.038  0.04356 *
infl.l1   -0.17893    0.10005  -1.788  0.07598 .
cpr.l1     1.60584    0.52542   3.056  0.00271 **
y.l1       3.10626    1.54123   2.015  0.04587 *
tbr.l1    -1.88738    0.57014  -3.310  0.00120 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.369 on 133 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4671,     Adjusted R-squared: 0.3629
F-statistic: 4.483 on 26 and 133 DF,  p-value: 4.224e-09


Response cpr.d :

Call:
lm(formula = substitute(cpr.d), data = data.mat)

Residuals:
```

```
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.95408 -0.29189 -0.00424  0.33068  1.96792

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant  -4.730930   5.462060  -0.866 0.387971
m.dl1      8.880176  10.204579   0.870 0.385751
infl.dl1  -0.004534   0.065948  -0.069 0.945287
cpr.dl1    0.175298   0.296502   0.591 0.555376
y.dl1      7.249915   8.944154   0.811 0.419057
tbr.dl1    0.145036   0.341248   0.425 0.671511
m.dl2     -7.694744  11.124321  -0.692 0.490329
infl.dl2   0.070119   0.067897   1.033 0.303608
cpr.dl2   -0.188089   0.277303  -0.678 0.498771
y.dl2     14.438068   8.712802   1.657 0.099854 .
tbr.dl2   -0.237803   0.334747  -0.710 0.478701
m.dl3     46.387990  11.283541   4.111 6.85e-05 ***
infl.dl3   0.144763   0.064410   2.248 0.026254 *
cpr.dl3   -0.128244   0.242175  -0.530 0.597307
y.dl3     -5.313076   8.496257  -0.625 0.532817
tbr.dl3    0.479973   0.279014   1.720 0.087714 .
m.dl4    -39.274808   9.877625  -3.976 0.000114 ***
infl.dl4   0.007081   0.047093   0.150 0.880710
cpr.dl4    0.306075   0.226949   1.349 0.179742
y.dl4      4.661377   8.125207   0.574 0.567144
tbr.dl4   -0.079425   0.276675  -0.287 0.774505
m.l1       1.305150   1.687369   0.773 0.440610
infl.l1    0.110141   0.053397   2.063 0.041087 *
cpr.l1    -0.602770   0.280431  -2.149 0.033410 *
y.l1      -0.455856   0.822592  -0.554 0.580393
tbr.l1     0.567537   0.304298   1.865 0.064376 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.7308 on 133 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5047,     Adjusted R-squared: 0.4079
F-statistic: 5.212 on 26 and 133 DF,  p-value: 7.963e-11


Response y.d :

Call:
lm(formula = substitute(y.d), data = data.mat)

Residuals:
       Min         1Q     Median         3Q        Max
-0.0262540 -0.0044490  0.0002897  0.0036474  0.0208907

Coefficients:
           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant  0.1811360  0.0572627   3.163  0.00193 **
```

```
m.dl1    -0.0644542  0.1069819  -0.602  0.54788
infl.dl1  0.0010922  0.0006914   1.580  0.11654
cpr.dl1  -0.0049861  0.0031084  -1.604  0.11108
y.dl1     0.0173739  0.0937680   0.185  0.85329
tbr.dl1   0.0078278  0.0035775   2.188  0.03041 *
m.dl2     0.1570380  0.1166242   1.347  0.18042
infl.dl2  0.0007946  0.0007118   1.116  0.26628
cpr.dl2  -0.0060220  0.0029072  -2.071  0.04025 *
y.dl2     0.0105490  0.0913425   0.115  0.90823
tbr.dl2   0.0040711  0.0035094   1.160  0.24810
m.dl3    -0.0557472  0.1182934  -0.471  0.63823
infl.dl3  0.0003969  0.0006753   0.588  0.55767
cpr.dl3  -0.0060325  0.0025389  -2.376  0.01893 *
y.dl3    -0.0621203  0.0890723  -0.697  0.48676
tbr.dl3   0.0085712  0.0029251   2.930  0.00399 **
m.dl4     0.0797055  0.1035542   0.770  0.44284
infl.dl4  0.0007469  0.0004937   1.513  0.13271
cpr.dl4   0.0001803  0.0023793   0.076  0.93971
y.dl4     0.0004693  0.0851824   0.006  0.99561
tbr.dl4  -0.0018610  0.0029006  -0.642  0.52224
m.l1     -0.0551087  0.0176899  -3.115  0.00225 **
infl.l1  -0.0009139  0.0005598  -1.633  0.10492
cpr.l1    0.0005098  0.0029400   0.173  0.86259
y.l1      0.0242253  0.0086238   2.809  0.00572 **
tbr.l1   -0.0026392  0.0031902  -0.827  0.40956
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.007661 on 133 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6368,     Adjusted R-squared: 0.5658
F-statistic: 8.969 on 26 and 133 DF,  p-value: < 2.2e-16


Response tbr.d :

Call:
lm(formula = substitute(tbr.d), data = data.mat)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-2.551133 -0.343593 -0.003643  0.324849  1.905271

Coefficients:
          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
constant  -2.69718    4.89187  -0.551 0.582312
m.dl1     11.31077    9.13930   1.238 0.218046
infl.dl1   0.04152    0.05906   0.703 0.483259
cpr.dl1    0.08208    0.26555   0.309 0.757724
y.dl1      6.68140    8.01046   0.834 0.405729
tbr.dl1    0.18410    0.30562   0.602 0.547962
m.dl2     -8.66460    9.96303  -0.870 0.386045
```

```
infl.dl2   0.12245    0.06081   2.014 0.046061 *
cpr.dl2   -0.03161    0.24835  -0.127 0.898900
y.dl2     11.91397    7.80326   1.527 0.129187
tbr.dl2   -0.37025    0.29980  -1.235 0.219012
m.dl3     33.60592   10.10563   3.325 0.001141 **
infl.dl3   0.15682    0.05769   2.719 0.007432 **
cpr.dl3   -0.21042    0.21689  -0.970 0.333739
y.dl3     -4.35580    7.60932  -0.572 0.567997
tbr.dl3    0.49084    0.24989   1.964 0.051586 .
m.dl4    -35.02338    8.84648  -3.959 0.000122 ***
infl.dl4   0.01522    0.04218   0.361 0.718758
cpr.dl4    0.15918    0.20326   0.783 0.434947
y.dl4      8.48245    7.27700   1.166 0.245841
tbr.dl4   -0.03043    0.24779  -0.123 0.902449
m.l1       0.28800    1.51122   0.191 0.849148
infl.l1    0.08530    0.04782   1.784 0.076765 .
cpr.l1    -0.20065    0.25116  -0.799 0.425769
y.l1       0.10882    0.73672   0.148 0.882794
tbr.l1     0.12794    0.27253   0.469 0.639520
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.6545 on 133 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.473,      Adjusted R-squared:  0.37
F-statistic: 4.592 on 26 and 133 DF,  p-value: 2.318e-09
```

Il comando

```
> cointegrazione@Vorg
               m.l1    infl.l1     cpr.l1        y.l1      tbr.l1
m.l1    -20.0553345 17.2313812  2.6946506 -5.95060085 -10.2892832
infl.l1  -0.5421791  0.3945178  0.4599235  0.25222782   0.3522921
cpr.l1    3.9815808  2.6647959 -0.5654596  0.01134844   0.3731966
y.l1      9.5829036 -7.8666546 -2.0815097  6.37484255   1.6637099
tbr.l1   -4.6903115 -2.2064804  0.1617502 -0.59083186  -0.5704743
```

restituisce i valori non normalizzati delle relazioni di cointegrazione, per cui bisogna manipolare questa matrice in modo da ottenere le relazioni corrette:

```
> X <- cointegrazione@Vorg
>beta.m <- X[,1]/X[1, 1]
>beta.cpr <- X[,2]/X[3, 2]
```

i due vettori di cointegrazione risultano essere

```
> beta.m
       m.l1     infl.l1      cpr.l1        y.l1      tbr.l1
 1.00000000  0.02703416 -0.19852976 -0.47782318  0.23386852
```

```
> beta.cpr
      m.l1    infl.l1     cpr.l1       y.l1     tbr.l1
 6.4663043  0.1480480  1.0000000 -2.9520665 -0.8280110
```

Considerando come candidati più probabili le relazioni di domanda di moneta e premio per il rischio , imporremo che m e cpr abbiano rispettivamente coefficienti -1,0 e 0,-1. Da un punto di vista economico ci aspettiamo che infl non entri in nessuno dei due coefficienti di cointegrazione.

Ci aspettavamo a priori che il vettore di cointegrazione dell'equazione del premio per il rischio, con coefficienti infl, y e tbr non fossero rispettivamante significativamente diversi da 0, 0 ed 1. Come si può notare, il coefficiente y è sensibilmente diverso da 0.

3.6 Appendice statistica D

Si consideri un vettore autoregressivo di ordine p del tipo:

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + \ldots + A_p Y_{t-p} + B x_t + \epsilon_t,$$

dove Y_t è un vettore k-dimensionale di variabili non stazionarie di tipo I(1), X_t è un vettore di variabili deterministiche, ϵ_t è un vettore delle innovazioni o di disturbo. Il vettore autoregressivo può essere riscritto come:

$$\Delta Y_t = \pi Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta Y_{t-i} + \beta X_t + \epsilon_t;$$

dove: $\pi = \sum_{i=1}^{p} A_i - I$, $\Gamma_i = -\sum_{j=i+1}^{p} A_j$, I è la matrice identità.

Il teorema della rappresentazione di **Granger** assicura che, se la matrice dei coefficienti π ha rango r<k, allora esistono due matrici (k x r) a e b, ciascuna di rango r, tali che $\pi = \alpha\beta'$, con $\beta' Y_t$ stazionaria. In tal modo r rappresenta il numero delle relazioni cointegranti (il rango cointegrante) e ciascuna colonna di β è un vettore cointegrante. Gli elementi di α sono noti come parametri di aggiustamento.

Il **metodo di Johansen** stima la matrice π per poi verificare se si possono rifiutare le restrizioni implicite nel rango ridotto di π. Per verificare il rango della matrice π si utilizza un test χ^2, tuttavia Johansen sottolinea la necessità di specificare alcuni elementi caratterizzanti del test prima di applicarlo, poiché un'errata specificazione degli input può portare a risultati errati. In base agli input scelti il test assumerà una

forma diversa e la distribuzione χ^2 di riferimento cambierà poiché cambieranno i gradi di libertà della statistica. L'autore si sofferma sull'eventualità che le serie esaminate e/o le equazioni cointegranti presentino intercetta e trend considerando in particolare cinque possibilità:

- Le serie Y_t su cui va verificata l'eventuale presenza di cointegrazione non presentano un trend di natura deteministica e non hanno intercetta. In questo caso si ha: $H_2(r): \pi Y_{t-1} + BX_t = \alpha B' Y_{t-1};$
- Le serie esaminate non presentano una componente di trend ma le equazioni cointegranti hanno intercetta: $H'_1(r): \pi Y_{t-1} + BX_t = \alpha(B' Y_{t-1} + \rho_0);$
- Le serie presentano una componente di trend lineare ma le equazioni cointegranti hanno solo l'intercetta: $H_1(r): \pi Y_{t-1} + BX_t = \alpha(B' Y_{t-1}) + \rho_0 + \alpha_\perp \gamma_0;$
- Sia le serie che le equazioni cointegranti presentano una componente di trend lineare: $H'(r): \pi Y_{t-1} + BX_t = \alpha(B' Y_{t-1} + \rho_0 + \rho_1 t) + \alpha_\perp \gamma_0;$
- Le serie hanno trend quadratico e le equazioni cointegranti hanno trend lineare: $H(r): \pi Y_{t-1} + BX_t = \alpha(B' Y_{t-1} + \rho_0 + \rho_1 t) + \alpha_\perp(\gamma_0 + \gamma_1 t);$

dove $\alpha_\perp$ è una matrice non unica k(k-r) tale che $\alpha\alpha_\perp = 0$ ed il rango di $\alpha \mid \alpha_\perp$ = k.

Questi cinque casi sono legati dalle seguenti relazioni di inclusione:

$$H_2(r) \subset_{\chi^2_r} H'_1(r) \subset_{\chi^2_{k-r}} H_1(r) \subset_{\chi^2_r} H'(r) \subset_{\chi^2_{k-r}} H(r).$$

Quest'ultima relazione assume un'importanza pratica fondamentale poiché essa evidenzia il tipo di distribuzione χ^2 da utilizzare in relazione alla scelta effettuata su elementi caratterizzanti quali l'intercetta e la componente di trend. Tali scelte vanno ovviamente fatte in relazione alla conoscenza del fenomeno e delle serie a disposizione. Una volta scelta la serie di riferimento (uno dei cinque casi sopra esposti), va costruita la statistica test che servirà per verificare l'eventuale presenza di cointegrazione. Tale statistica può essere riassunta con il seguente sistema:

$$n \sum_{i=r+1}^{k} \log((1-\lambda_i)/(1-\lambda'_i)) \approx \chi^2_{k-r}$$

$$n \sum_{i=1}^{r} \log((1-\lambda_i)/(1-\lambda'_i)) \approx \chi^2_r$$

Si utilizzerà la prima se si è nei casi 5 e 3, la seconda negli altri tre casi. λ_i e λ'_i rappresentano i più grandi autovalori rispettivamente per i modelli H(r) e H'(r).

Capitolo 5:
Calcolo del coefficiente di avversione al rischio nell'allocazione ottima di portafoglio

Il capitolo propone lo sviluppo di un problema di allocazione ottimale di portafoglio vertendo sulla indagine della misurazione dell'avversione al rischio in contesti di incertezza. In questa delicata prospettiva si vuole fornire un modello di allocazione della ricchezza che tenga conto del livello dei redditi individuali e dalla distribuzione del collettivo di riferimento. Dopo una breve introduzione al problema segue lo sviluppo di Taylor del binomio di due variabili stocastiche, il calcolo dei coefficienti di avversione al rischio relativi alle funzioni di utilità individuali e la costruzione di una scala di rischio temperata attraverso l'utilizzo della distribuzione log-normale. Sfruttando le proprietà di quest'ultima si individua uno scarto di scala tra l'avversione al rischio dei redditi medi e l'avversione al rischio sistemico.

5.1 Introduzione

```
> dati <- read.csv("C:\\R\\prova.csv", header = TRUE, sep = ";",
na.string = " ")
> attach(dati)
> names(dati)
[1] "OBS"  "CPR"  "INFL" "M"    "TBR"  "Y"
> summary(dati)
      OBS            CPR              INFL               M
 1954Q1 :  1   Min.   : 1.310   Min.   :-1.335   Min.   :6.275
 1954Q2 :  1   1st Qu.: 3.909   1st Qu.: 2.623   1st Qu.:6.331
 1954Q3 :  1   Median : 5.767   Median : 3.853   Median :6.363
 1954Q4 :  1   Mean   : 6.266   Mean   : 4.280   Mean   :6.415
 1955Q1 :  1   3rd Qu.: 8.164   3rd Qu.: 5.449   3rd Qu.:6.430
 1955Q2 :  1   Max.   :16.213   Max.   :11.891   Max.   :6.814
 (Other):158
      TBR                Y
 Min.   : 0.8143   Min.   :7.414
 1st Qu.: 3.3277   1st Qu.:7.752
 Median : 5.1975   Median :8.088
 Mean   : 5.5930   Mean   :8.045
 3rd Qu.: 7.3223   3rd Qu.:8.336
 Max.   :15.0873   Max.   :8.600
```

Abbiamo caricato i dati di osservazioni trimestrali relative agli Stati Uniti e per il periodo 1954:1 – 1994:4 (T = 164). Le variabili CPR = Rendimento obbligazionario e TBR = Rendimento dei titoli di stato a breve scadenza sono rispettivamente interpretate come il rendimento rischioso e non rischioso su un orizzonte trimestrale di due portafogli distinti. Vogliamo procedere ottimizzando la gestione di portafoglio decidendo quanto della ricchezza complessiva allocare nei mercati finanziari e quanto di quest'ultima suddividere tra rendimenti ad alto e basso rischio.

Un investitore mediamente può investire o disinvestire solo in circa 30 specifici momenti durante l'anno. Si consideri un caso semplice di allocazione della ricchezza tra un'attività, moneta, con rendimento costante r_M, ed un'altra, portafoglio titoli, rischiosa, essendo il suo rendimento una variabile stocastica, con media r_p e varianza σ_p^2. Per comodità, si normalizzi la ricchezza iniziale, così che il vincolo di bilancio possa essere espresso come

$$\frac{W_0}{W_0} \equiv \frac{M}{W_0} + \frac{P}{W_0} \equiv (1-\alpha_p) + \alpha_p .$$

A seguito della normalizzazione, la ricchezza di fine periodo, che denotiamo con W_1, è interpretabile come il fattore di rendimento uniperiodale del portafoglio, riferibile all'arco di investimento. Date le ipotesi possiamo ricavare valore atteso, varianza, asimmetria e curtosi:

$$\begin{gathered} E[W_1] = (1+r_p)\alpha_p + (1+r_M)(1-\alpha_p); \\ Var[W_1] = \sigma_p^2 \alpha_p^2; \\ Skew[W_1] = \sigma^3 \alpha_p^3; \\ Kurt[W_1] = \sigma^4 \alpha_P^4; \end{gathered}$$

dove si noti che essendo costante il rendimento della moneta il termine di covarianza ed i momenti centrali dei rendimenti sono nulli. Il problema può essere quindi formulato, secondo lo sviluppo di Taylor, tenuto conto del vincolo di bilancio con ricchezza normalizzata, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} E[U(W_1)] = U(E[W_1]) + \frac{1}{2!}U''(E[W_1])Var[W_1] + \frac{1}{3!}U'''(E[W_1])Skew[W_1] + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{4!}U''''(E[W_1])Kurt[W_1], \;\; con\, U'(E[W_1])E[W_1 - E[W_1]] = 0. \end{aligned}$$

Scegliendo una opportuna funzione di utilità possiamo sostituire i termini: per una funzione esponenziale negativa (CARA) del tipo $U(x) = -e^{-\lambda x}$ otteniamo

$$E[-e^{-\lambda W_1}]=-e^{-\lambda E[W_1]}-\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]e^{-\lambda E[W_1]}+\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]e^{-\lambda E[W_1]}+\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1]e^{-\lambda E[W_1]}$$

$$E[-e^{-\lambda W_1}]=-e^{-\lambda E[W_1]}*\ldots$$
$$\ldots*(1+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1])$$

$$max(\alpha_p)U(E,V,S,K)=-e^{-\lambda E[W_1(\alpha_p)]}*\ldots$$
$$\ldots*(1+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1(\alpha_p)])^2 Var[W_1(\alpha_p)]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1(\alpha_p)])^3 Skew[W_1(\alpha_p)]+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1(\alpha_p)])^4 Kurt[W_1(\alpha_p)])$$

Analogamente al caso della ripartizione del capitale sui titoli tra portafoglio obbligazionario ed azionario, rispettivamente con tassi di rendimento r_B e r_K, incerti, attraverso lo sviluppo del binomio delle due variabili stocastiche, otteniamo

$$E(W_1)=(1+r_B)\alpha_B+(1+r_K)(1-\alpha_B);$$
$$Var[W_1]=\sigma_B^2\alpha_B^2+\sigma_K^2(1-\alpha_B)^2+2\sigma_{BK}^2(1-\alpha_B)\alpha_B$$
$$Skew[W_1]=\sigma_B^3\alpha_B^3+3\mu_{2,1}\alpha_B^2(1-\alpha_B)+3\mu_{1,2}\alpha_B(1-\alpha_B)^2+\sigma_K^3(1-\alpha_B)^3$$
$$Kurt[W_1]=\sigma_B^4\alpha_B^4+4\mu_{3,1}\alpha_B^3(1-\alpha_B)+6\mu_{2,2}\alpha_B^2(1-\alpha_B)^2+4\mu_{1,3}\alpha_B(1-\alpha_B)^3+\sigma_K^4(1-\alpha_B)^4$$

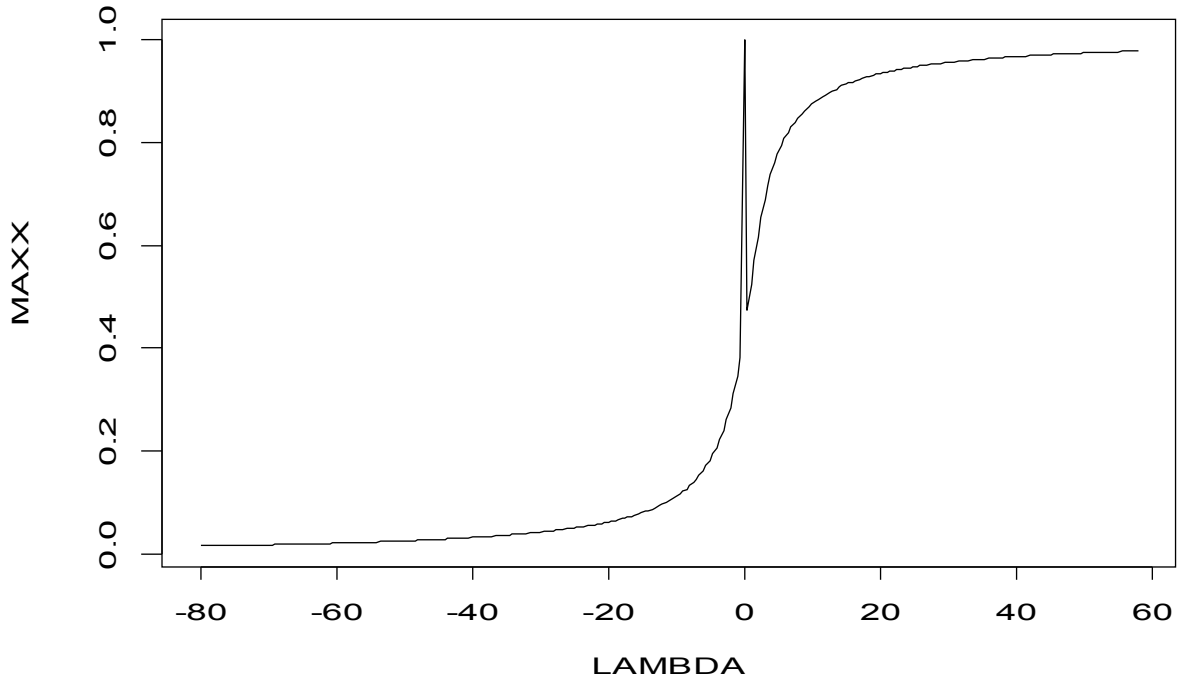
dove $\mu_{r,s}$ sono i momenti centrali misti di ordine r+s.

N.B.:Nell'esercizio si considerano i rendimenti anziché i tassi.

```
library(moments)
lambda= - 80
B <- 277
MAXX <-c(1:B)
OBJECT <- c(1:B)
LAMBDA <-c(1:B)
VMTBR <- c(1:length(TBR))
VMCPR <- c(1:length(CPR))
 for(i in 1:B){
LAMBDA[i]=lambda

#valore atteso
MTBR = mean(TBR)
MCPR = mean(CPR)
EW1 <- function(x) (MTBR)*x + (MCPR)*(1-x)

for(r in 1:length(TBR)){
VMTBR[r]=MTBR
}
```

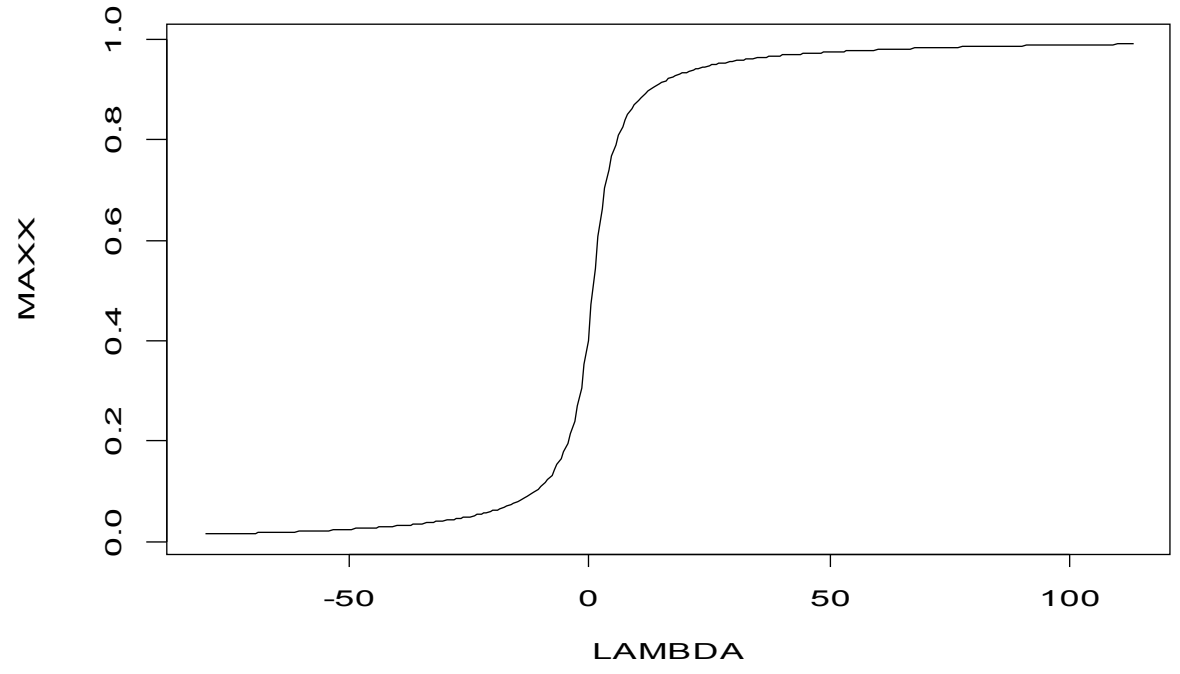
```
for(l in 1:length(CPR)){
VMCPR[l]=MCPR
}

#varianza
VTBR = var(TBR)
VCPR = var(CPR)
COVCT = cov(TBR, CPR)
VW1 <- function(x) VTBR*x^2 + VCPR*(1-x)^2 + 2*COVCT*x*(1-x)

# asimmetria
n = length(TBR)
STBR = skewness(TBR)
SCPR = skewness(CPR)
MU21 = sum((TBR-VMTBR)^2 * (CPR-VMCPR))/n
MU12 = sum((TBR-VMTBR) * (CPR-VMCPR)^2)/n
SW1 <- function(x) STBR*(x^3) + 3*MU21*(x^2)*(1-x) + 3*MU12*x*((1-
x)^2) + SCPR*(1-x)^3

#curtosi
n = length(TBR)
KTBR = kurtosis(TBR)
KCPR = kurtosis(CPR)
MU31 = sum(((TBR-VMTBR)^3) * (CPR-VMCPR))/n
MU22 = sum(((TBR-VMTBR)^2) * (CPR-VMCPR)^2)/n
MU13 = sum((TBR-VMTBR) * (CPR-VMCPR)^3) /n
KW1   <-   function(x)   KTBR*(x^4)   +   4*MU31*(x^3)*(1-x)   +
6*MU22*(x^2)*((1-x)^2) + 4*MU13*x*((1-x)^3) + KCPR*((1-x)^4)

#momenti e funzione
#EW1 <- ((MTBR)*x + (MCPR)*(1-x))
#VW1 <- (VTBR*x^2 + VCPR*(1-x)^2 + 2*COVCT*x*(1-x))
#SW1 <- (STBR*(x^3) + 3*MU21*(x^2)*(1-x) + 3*MU12*x*((1-x)^2) +
SCPR*(1-x)^3)
#KW1 <- (KTBR*(x^4) + 4*MU31*(x^3)*(1-x) + 6*MU22*(x^2)*((1-x)^2)
+ 4*MU13*x*((1-x)^3) + KCPR*((1-x)^4))
f <- function(x) exp(-lambda*((MTBR)*x + (MCPR)*(1-x)))*(1 +
(1/factorial(2))*(lambda^2)*(((MTBR)*x + (MCPR)*(1-
x))^2)*(VTBR*x^2 + VCPR*(1-x)^2 + 2*COVCT*x*(1-x)) -
(1/factorial(3))*(lambda^3)*(((MTBR)*x + (MCPR)*(1-
x))^3)*(STBR*(x^3) + 3*MU21*(x^2)*(1-x) + 3*MU12*x*((1-x)^2) +
SCPR*(1-x)^3) + (1/factorial(4))*(lambda^4)*(((MTBR)*x +
(MCPR)*(1-x))^4)*(KTBR*(x^4) + 4*MU31*(x^3)*(1-x) +
6*MU22*(x^2)*((1-x)^2) + 4*MU13*x*((1-x)^3) + KCPR*((1-x)^4)))

maxx <- optimize(f, lower = 0, upper = 1, maximum = TRUE, tol =
1e-04)
MAXX[i] = maxx$maximum
OBJECT[i] = maxx$objective
lambda = lambda + 0.7
}
```

```
> plot(MAXX, type="l")
```

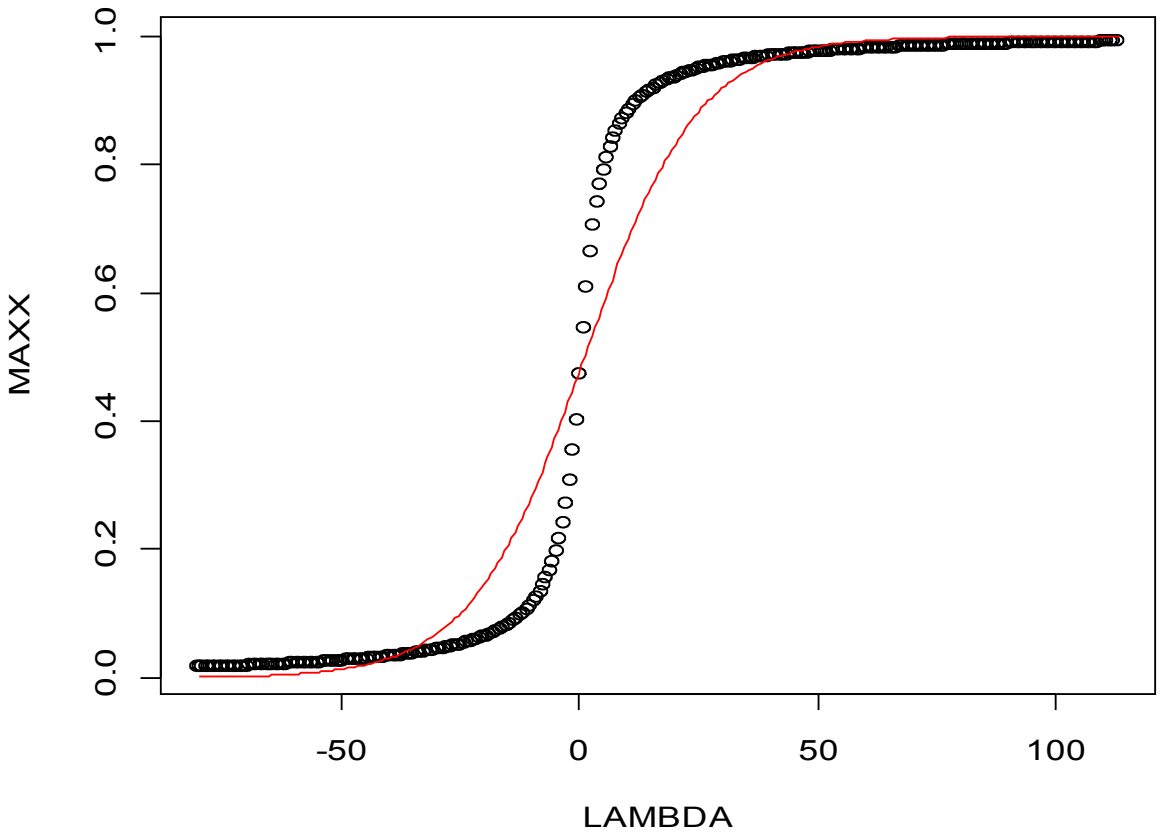


Come possiamo notare la funzione ha un andamento sigmoidale con uno shock in zero: sarà necessario manipolare la distribuzione per poterla utilizzare. In particolare dobbiamo accuratamente evitare lo zero o interpolarne il valore.

```
> plot(MAXX, type="l")
```



```
> summary(MAXX)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.01496 0.03990 0.92130 0.58000 0.98100 0.99040

> glmpol4<- glm(MAXX ~ LAMBDA, family=binomial(link=logit))
> glmpol4

Call:  glm(formula = MAXX ~ LAMBDA, family = binomial(link =
logit))

Coefficients:
(Intercept)       LAMBDA
   -0.09099      0.08408

Degrees of Freedom: 276 Total (i.e. Null);  275 Residual
Null Deviance:      280.2
Residual Deviance: 14.75        AIC: 59.86
> logLik(glmpol4)
'log Lik.' -27.93125 (df=2)
> #glmpol4$linear.predictors
> #glmpol4$fitted.values
> plot(LAMBDA, MAXX)
> lines(LAMBDA, glmpol4$fitted, col="red")
```

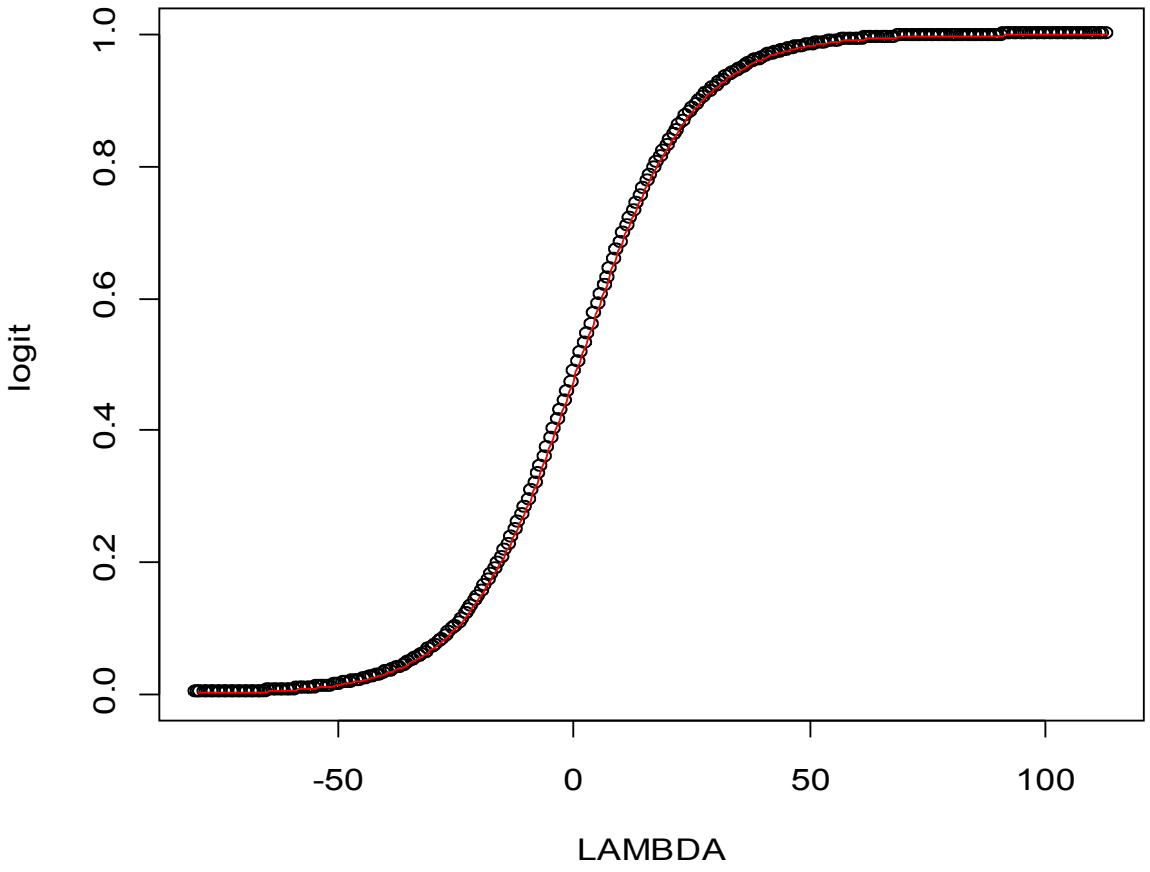


Il modello fittato è

$$\pi(x) = E(Y|x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}$$

infatti se proviamo a ridistribuire i LAMBDA secondo il modello otteniamo due grafici coincidenti (cfr. figura seguente). Tuttavia come si evince dal grafico precedente la regressione logit non stima precisamente gli alfa (MAXX = α_B): la funzione tende a sovrastimare l'avversione al rischio per i lambda minori di 0 ed a sottostimare per lambda maggiori di 0.

```
> logit <- (exp(-0.09099 + 0.08408*LAMBDA))/(1 + (exp(-0.09099   +
0.08408*LAMBDA)))
> plot(LAMBDA, logit)
> lines(LAMBDA, glmpol4$fitted, col="red")
```



Dimentichiamoci per ora della distorsione, il fit è oggettivamente troppo impreciso, genererebbe una scala inappropriata e, con l'impegno di migliorare successivamente il modello, procediamo con l'analisi.

5.2 Sviluppo della funzione di utilità

Una cosa da notare è che continuando lo sviluppo della funzione di utilità

$$E[-e^{-\lambda W_1}]=-e^{-\lambda E[W_1]}*\ldots$$
$$\ldots*(1+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1])$$

otteniamo

$$E[-e^{-\lambda W_1}]=(1-\lambda E(W_1)+\frac{\lambda^2}{2!}E(W_1)^2-\frac{\lambda^3}{3!}E(W_1)^3+\frac{\lambda^4}{4!}E(W_1)^4+\ldots)*\ldots$$
$$\ldots*(1+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1])$$

e moltiplicando alla Cauchy otteniamo la parte interessante

$$1+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1]-\lambda E(W_1)+\ldots$$

e le parti trascurabili in quanto dovrebbero rappresentare un errore piccolo **o:**

$$\ldots-\lambda E[W_1]*(\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Skew[W_1])\ldots$$

$$\ldots+\frac{\lambda^2}{2!}(E[W_1])^2 E[e^{E[W_1](W1-E[W_1])}]+\ldots$$

$$\ldots-\frac{\lambda^3}{3!}(E[W_1])^3 E[e^{E[W_1](W1-E[W_1])}]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\lambda^4}{4!}(E[W_1])^4 E[e^{E[W_1](W1-E[W_1])}]+\ldots$$

e così via. Dalla forma

$$E[-e^{-\lambda W_1}]=\ldots$$

$$1+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1]-\lambda E(W_1)+\ldots$$

attraverso alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$E(1-\lambda W_1+\frac{\lambda^2}{2!}(W_1)^2+\ldots+\frac{\lambda^r}{r!}(W_1)^r)=\ldots$$

$$1-\lambda E[W_1]+\frac{1}{2!}\lambda^2(E[W_1])^2 Var[W_1]-\frac{1}{3!}\lambda^3(E[W_1])^3 Skew[W_1]+\frac{1}{4!}\lambda^4(E[W_1])^4 Kurt[W_1]+\ldots$$

da cui eliminando l'1 e raccogliendo $-\lambda$

$$E(W_1-\frac{\lambda}{2!}(W_1)^2+\ldots+\frac{\lambda^{r-1}}{r!}(W_1)^r)=\ldots$$

$$E[W_1]-\frac{1}{2!}\lambda(E[W_1])^2\,Var[W_1]+\frac{1}{3!}\lambda^2(E[W_1])^3\,Skew[W_1]-\frac{1}{4!}\lambda^3(E[W_1])^4\,Kurt[W_1]+o$$

forma assai più gradita. Tuttavia per evitare errori l'esercizio è stato svolto sulla funzione di utilità originale.

Una volta stabilita la composizione del portafoglio finanziario P possiamo calcolarne i momenti

$$E(r_p)=(r_B)\alpha_B+(r_K)(1-\alpha_B);$$
$$Var[r_p]=\sigma_B^2\alpha_B^2+\sigma_K^2(1-\alpha_B)^2+2\sigma_{BK}^2(1-\alpha_B)\alpha_B$$
$$Skew[r_p]=\sigma_B^3\alpha_B^3+3\mu_{2,1}\alpha_B^2(1-\alpha_B)+3\mu_{1,2}\alpha_B(1-\alpha_B)^2+\sigma_K^3(1-\alpha_B)^3$$
$$Kurt[r_p]=\sigma_B^4\alpha_B^4+4\mu_{3,1}\alpha_B^3(1-\alpha_B)+6\mu_{2,2}\alpha_B^2(1-\alpha_B)^2+4\mu_{1,3}\alpha_B(1-\alpha_B)^3+\sigma_K^4(1-\alpha_B)^4$$

e con questi trovare la quantità α_p.

N.B.: r_B ed r_K sono i rendimenti.

Per un dato valore di lambda, ad esempio -1.6, abbiamo la seguente situazione

```
>lambda= -1.6

f <- function(x) exp(-lambda*((MTBR)*x + (MCPR)*(1-x)))*(1 +
(1/factorial(2))*(lambda^2)*(((MTBR)*x + (MCPR)*(1-
x))^2)*(VTBR*x^2 + VCPR*(1-x)^2 + 2*COVCT*x*(1-x)) -
(1/factorial(3))*(lambda^3)*(((MTBR)*x + (MCPR)*(1-
x))^3)*(STBR*(x^3) + 3*MU21*(x^2)*(1-x) + 3*MU12*x*((1-x)^2) +
SCPR*(1-x)^3) + (1/factorial(4))*(lambda^4)*(((MTBR)*x +
(MCPR)*(1-x))^4)*(KTBR*(x^4) + 4*MU31*(x^3)*(1-x) +
6*MU22*(x^2)*((1-x)^2) + 4*MU13*x*((1-x)^3) + KCPR*((1-x)^4)))

maxx <- optimize(f, lower = 0, upper = 1, maximum = TRUE, tol =
1e-04)
> maxx
$maximum
[1] 0.3070423 = α_B

$objective
[1] 1427974687

> Erp <- maxx$maximum * MTBR + (1-maxx$maximum) * MCPR
> Erp
[1] 6.059688 = r_p = E(R_p)
```

```
> VARrp <- (VTBR*maxx$maximum^2 + VCPR*(1-maxx$maximum)^2 +
2*COVCT*maxx$maximum*(1-maxx$maximum))
> VARrp
[1] 9.167282 =
```
σ_p^2

```
> SKEWrp <- (STBR*(maxx$maximum^3) + 3*MU21*(maxx$maximum^2)*(1-
maxx$maximum) + 3*MU12*maxx$maximum*((1-maxx$maximum)^2) +
SCPR*(1-maxx$maximum)^3)
> SKEWrp
[1] 16.19190 =
```
σ_p^3

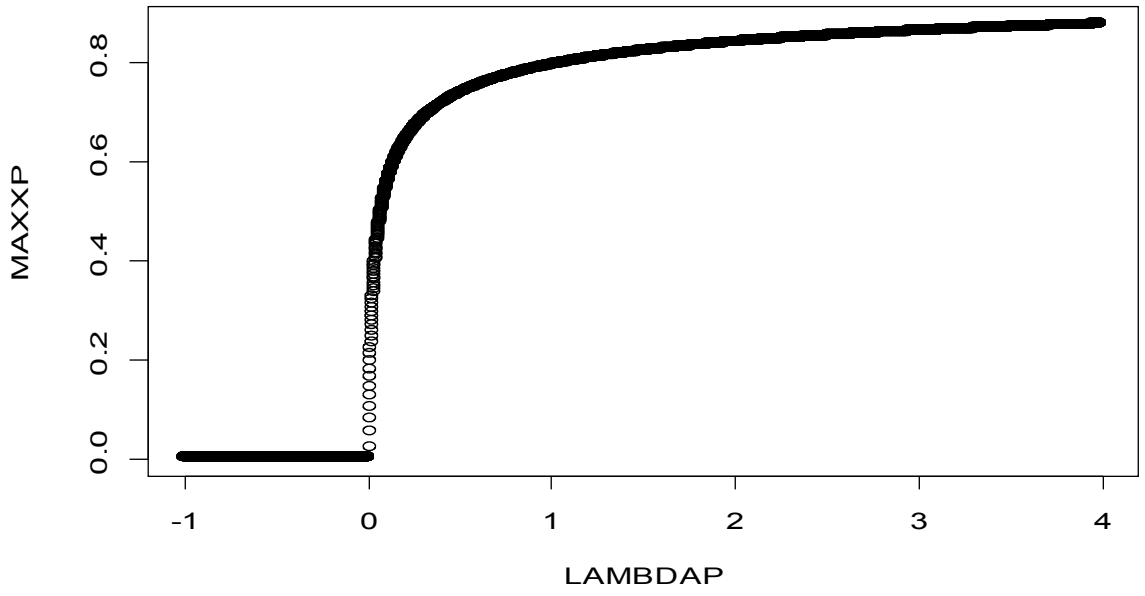
```
> KURTrp <-(KTBR*(maxx$maximum^4) + 4*MU31*(maxx$maximum^3)*(1-
maxx$maximum) + 6*MU22*(maxx$maximum^2)*((1-maxx$maximum)^2) +
4*MU13*maxx$maximum*((1-maxx$maximum)^3) + KCPR*((1-
maxx$maximum)^4))
> KURTrp
[1] 230.8997 =
```
σ_p^4

Posto $r_M = 0$ (poniamo di avere a disposizione un conto corrente indicizzato all'inflazione) possiamo provare a ricavare la distribuzione del coefficiente di avversione al rischio $\lambda_p = lambdap$.

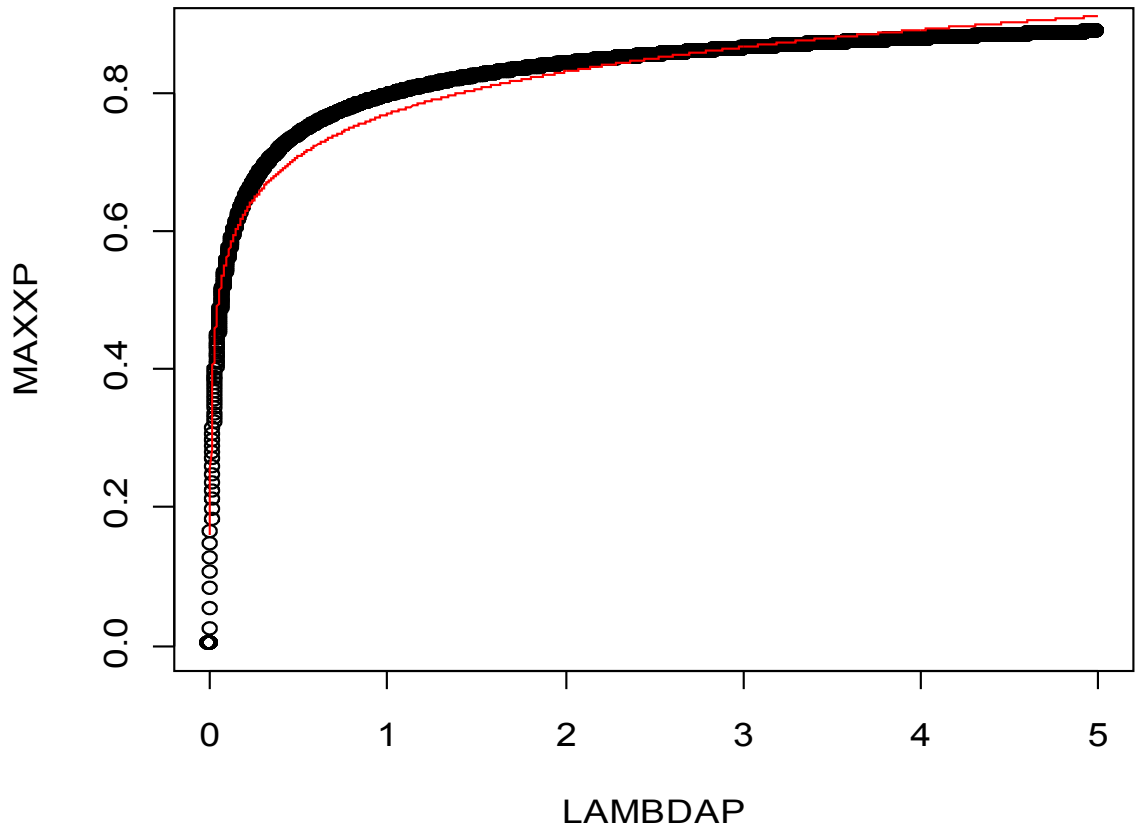
N.B: $E[-e^{-\lambda W_1}] = -E[e^{-\lambda W_1}]$, così eliminiamo il – da #esponenziale.

```
#Core function portafoglio

Erm <- 0
lambdap= 0
B <- 5000
MAXXP <-c(1:B)
OBJECTP <- c(1:B)
LAMBDAP <-c(1:B)
for(i in 1:B){

#momenti e funzione

Erp = 6.059688
VARrp =  9.167282
SKEWrp =  16.19190
KURTrp =  230.8997

#esponenziale
#fp <- function(z) exp(-lambdap*((Erm)*z + (Erp)*(1-z)))*(1+
((lambdap^2)/factorial(2))*(VARrp*(1-z)^2)-
((lambdap^3)/factorial(3))*(SKEWrp*(1-z)^3)+
((lambdap^4)/factorial(4))*(KURTrp*(1-z)^4))

#lineare1
fp <- function(z) ((Erm)*z + (Erp)*(1-z)) -
((lambdap)/factorial(2))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-z))^2)*(VARrp*(1-
```

```
z)^2)+
((lambdap^2)/factorial(3))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-z))^3)*(SKEWrp*(1-
z)^3)-
((lambdap^3)/factorial(4))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-z))^4)*(KURTrp*(1-
z)^4)

#lineare2
#fp <- function(z) 1- lambdap*((Erm)*z + (Erp)*(1-z)) +
#((lambdap^2)/factorial(2))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-
#z))^2)*(VARrp*(1-z)^2)-
#((lambdap^3)/factorial(3))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-
#z))^3)*(SKEWrp*(1-z)^3)+
#((lambdap^4)/factorial(4))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-
#z))^4)*(KURTrp*(1-z)^4)

maxxp <- optimize(fp, lower = 0, upper = 1, maximum = TRUE, tol =
1e-04)

MAXXP[i] = maxxp$maximum
OBJECTP[i] = maxxp$objective
LAMBDAP[i] = lambdap
lambdap = lambdap + 0.001
}

plot(LAMBDAP, MAXXP)
Erm <- 0
lambdap= -1
B <- 5000
lambdap = lambdap + 0.001
```



```
> MAXXPpure <- MAXXP[2:5000]
> LAMBDAPpure <- LAMBDAP[2:5000]

> fit1 <- lm(MAXXPpure ~ log(LAMBDAPpure))
> fit1

Call:
lm(formula = MAXXPpure ~ log(LAMBDAPpure))

Coefficients:
     (Intercept)  log(LAMBDAPpure)
         0.77039           0.08813

> y <- 0.77039 + 0.08813*log(LAMBDAPpure)

> plot(LAMBDAP, MAXXP)
> points(LAMBDAPpure,y, type="l", col="red")
```



Abbiamo fittato i valori con una regressione logaritmica: abbiamo dovuto eliminare lo zero dalle liste per ovvi motivi di gestione della funzione. Ora possiamo ricavarci i valori **LAMBDAP** corrispondenti (QUANTVAL) alle percentuali significative di portafoglio con la funzione #Quantile Core function 1.

α_p	λ_p
0,05	0,0003
0,1	0,0005
0,15	0,0009
0,2	0,0016
0,25	0,0028
0,3	0,0049
0,35	0,0085
0,4	0,0150
0,45	0,0264
0,5	0,0466
0,55	0,0821
0,6	0,1447
0,65	0,2552
0,7	0,4500
0,75	0,7935
0,8	1,4000
0,85	2,4680
0,9	4,3530
0,95	7,6760

```
#Quantile Core function 1

B <- 10000
VAL <- c(1:B)
LOGITVAL <- c(1:B)
EVAL <- c(1:B)
QUANTVAL <-c(1:length(PROB))
for(j in 1:length(PROB)){
val = 0.0001
   for(i in 1:B){
   LOGITVAL[i] = y <- 0.77039 + 0.08813*log(val)
   VAL[i] = val
   if(LOGITVAL[i]<= PROB[j]) {EVAL[i]= 1000}
   else  {EVAL[i] = VAL[i]
          QUANTVAL[j] = min(EVAL)}
   val <- val + 0.0001
   }
}
```

Da notare che nel calcolo degli α_p si è usata l'approssimazione lineare (#lineare1) ottenuta nelle semplificazioni introduttive, poiché la forma esponenziale e logaritmica presentano dei problemi ovvero un comportamento "capriccioso": a salti.

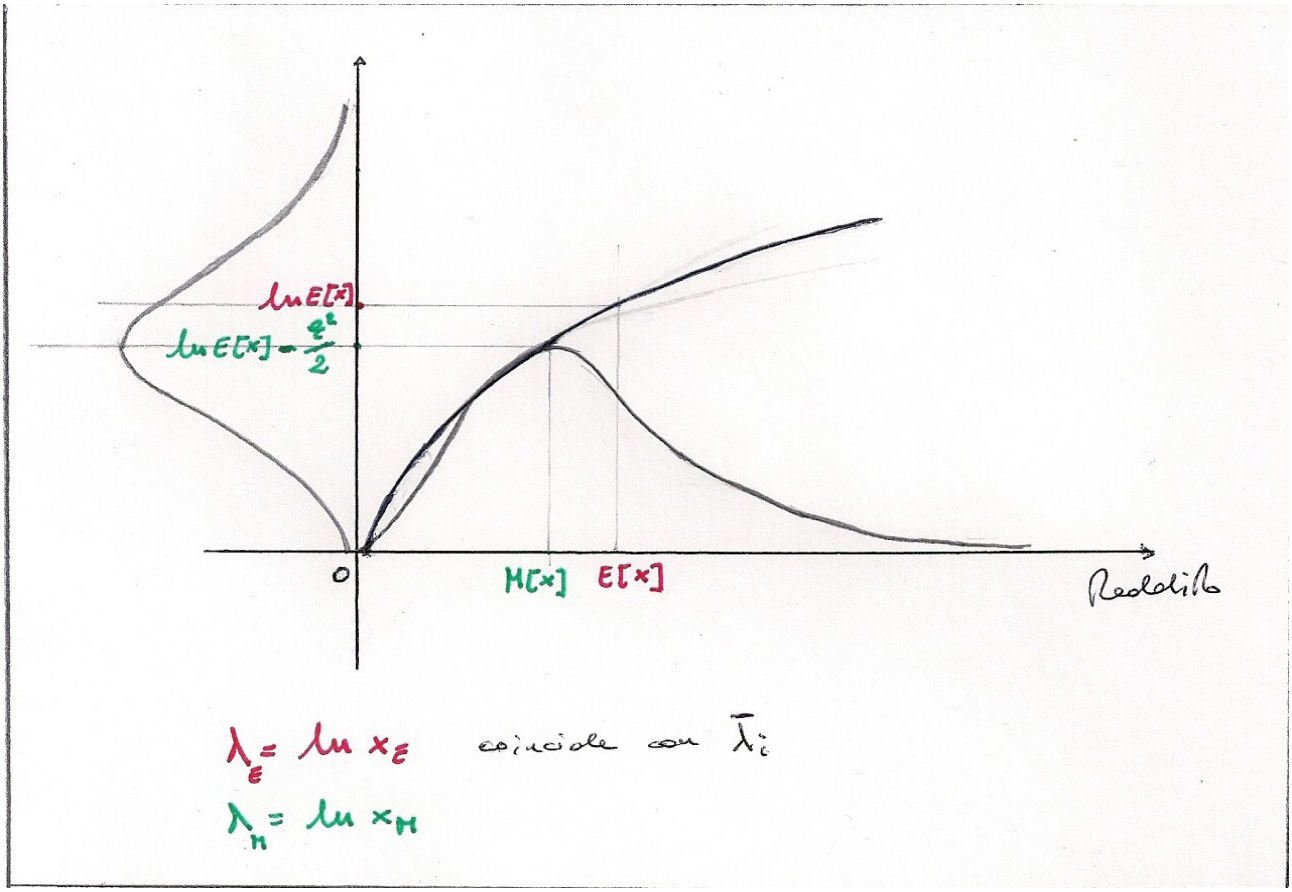
5.3 L'effetto ricchezza

Si osservi che α_p ed α_B non dipendono in alcun modo dalla ricchezza iniziale del consumatore-investitore. Ciò rappresenta un limite del modello (CARA[34]): le scelte d'investimento di un investitore dotato di elevata ricchezza iniziale sono identiche a quelle di un investitore dotato di modesta ricchezza iniziale (in termini tecnici, non si osserva alcun *effetto-ricchezza*). Se ne conclude che, nonostante i suoi vantaggi dal punto di vista analitico, il modello CARA non è adatto allo studio di situazioni in cui ci si aspetta che la ricchezza iniziale degli agenti economici abbia un ruolo rilevante nelle loro scelte.

Questo non significa che il modello sia inutile, ma semplicemente che il suo grado di approssimazione della realtà è soddisfacente solo in determinate condizioni, in particolare laddove non si ritiene interessante analizzare effetti legati alla ricchezza iniziale.

L'indice λ (lambda) è tuttavia una leva a disposizione sulla quale si può lavorare per avere una ponderazione delle esigenze individuali. Come possiamo calcolare lambda affinché si ottenga una scala di rischio percentuale secondo criterio?

Data la curva di distribuzione dei redditi di media E[x] e mediana M[x]



34 Costant Absolute Risk Adversion

possiamo considerare M[x] come **"certo equivalente sistemico"** ed E[x]-M[x] come **"premio per il rischio sistemico"** della lotteria dei guadagni. Prendendo come funzione di utilità il logaritmo dei redditi possiamo calcolare il **coefficiente di avversione al rischio** di Finetti-Arrow-Pratt per ogni livello di reddito pari a

$$\lambda(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{1}{x}.$$

Da notare che prendendo il logaritmo dei redditi si ottiene una distribuzione log-normale degli stessi. Possiamo fissare il valore medio dei nostri λ_i, $E[\lambda_i]$, in corrispondenza con il coefficiente di avversione al rischio del valore medio della lotteria (reddito medio) ed individuare una scala di avversione al rischio tale che

$$\lambda_E = E[\lambda_i] = \frac{1}{\bar{x}}.$$

La metafora della lotteria può essere quindi utile nel ricavare un insieme da mettere in corrispondenza biunivoca con i nostri λ.

Per un collettivo di distribuzione redditi (annuali) con

media = 14200
mediana = 12750
s.q.m. = 8013.44
varianza = 64215220

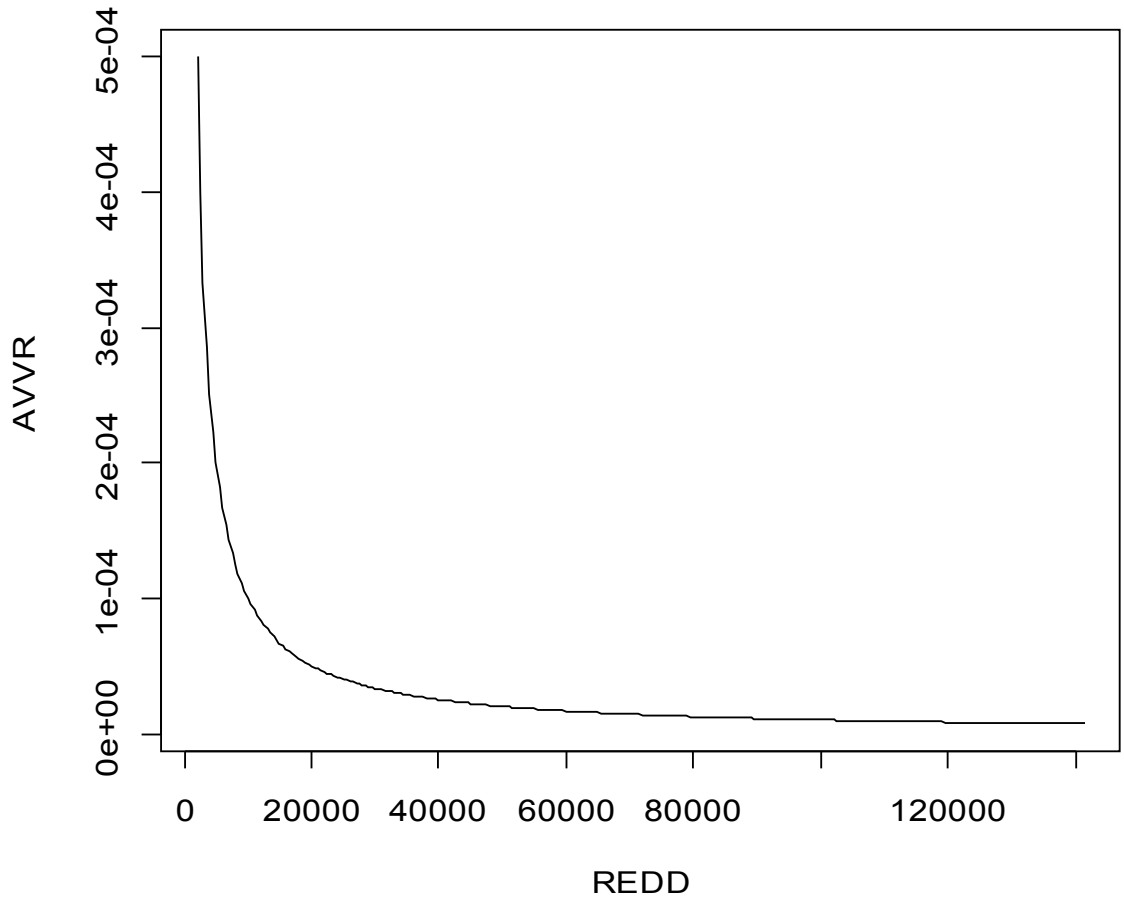
otteniamo i seguenti valori:

Esempio

Reddito	$\lambda_{FAP}(x)$
8000	1/8000 = 0.000125
12750	1/12750 = 0.00007843
14200	1/14200 = 0.000070422
20000	1/20000 = 0.00005
60000	1/60000 = 0.000016666

```
reddito <- 2000
B <- 280
AVVR <-c(1:B)
REDD <-c(1:B)
for(i in 1:B){
avvr = 1/reddito
REDD[i]= reddito
AVVR[i] = avvr
reddito = reddito + 500
}
```

```
> plot(REDD, AVVR, type="l")
```



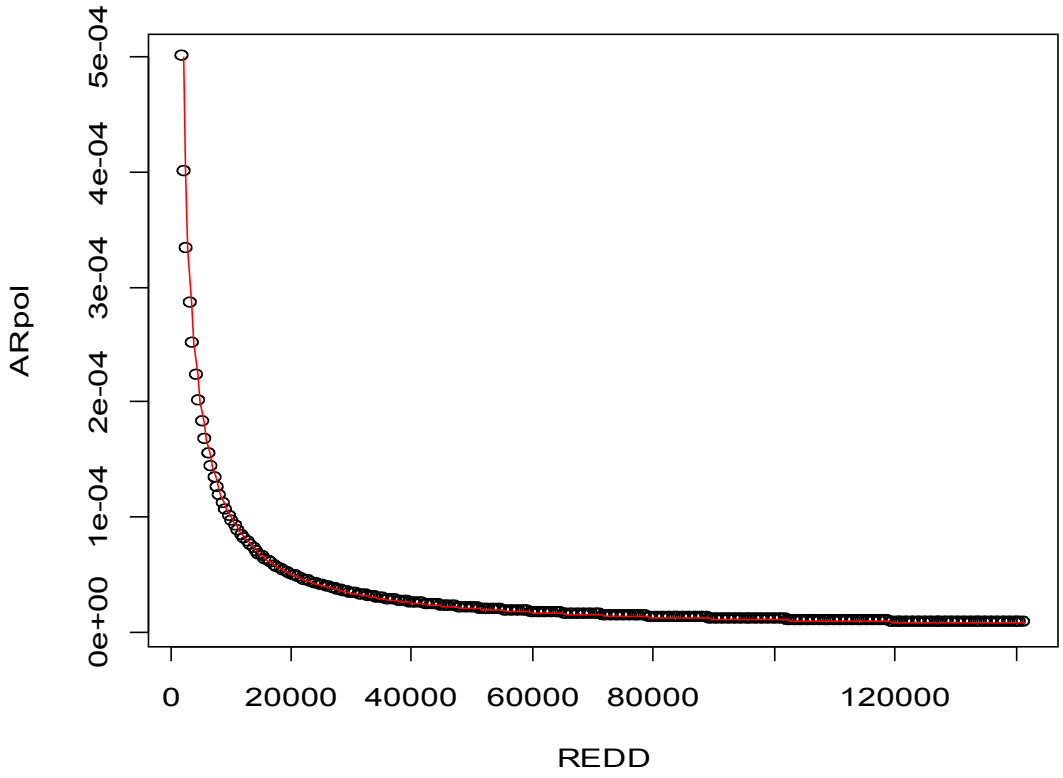

```
> lmAVV <- lm(AVVR~I(1/REDD))
> summary(lmAVV)

Call:
lm(formula = AVVR ~ I(1/REDD))

Residuals:
       Min          1Q      Median          3Q         Max
-4.491e-20 -1.887e-21 -3.353e-22  2.100e-21  1.383e-19

Coefficients:
              Estimate Std. Error    t value Pr(>|t|)
(Intercept) -6.963e-21  6.432e-22 -1.083e+01   <2e-16 ***
I(1/REDD)    1.000e+00  1.016e-17  9.839e+16   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 9.347e-21 on 278 degrees of freedom
Multiple R-squared:     1,      Adjusted R-squared:     1
F-statistic: 9.68e+33 on 1 and 278 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Il modello è del tipo

$$y = \beta_0 + \frac{1}{x}\beta_1$$

quindi abbiamo

```
> ARpol <- -6.963e-21 +  1.000e+00*(1/REDD)
> plot(REDD, ARpol)
> lines(REDD, AVVR , col="red")
```



Il modello fitta perfettamente i dati. Ora vogliamo mettere in corrispondenza biunivoca i due insiemi ovvero far corrispondere i coefficienti di avversione al rischio della funzione di utilità logaritmica $\lambda_{FAP}(x)$ con i coefficienti della esponenziale λ_l (logit).

Reddito	$\lambda_{FAP}(x)$	λ_l
8000	1/8000 = 0.000125	< -14,31687
12750	1/12750 = 0.00007843	-0,8169
14200	1/14200 = 0.000070422	0,8831
20000	1/20000 = 0.00005	6,58313 < x < 8,08313
60000	1/60000 = 0.000016666	> 14,78313

Per un modello del tipo

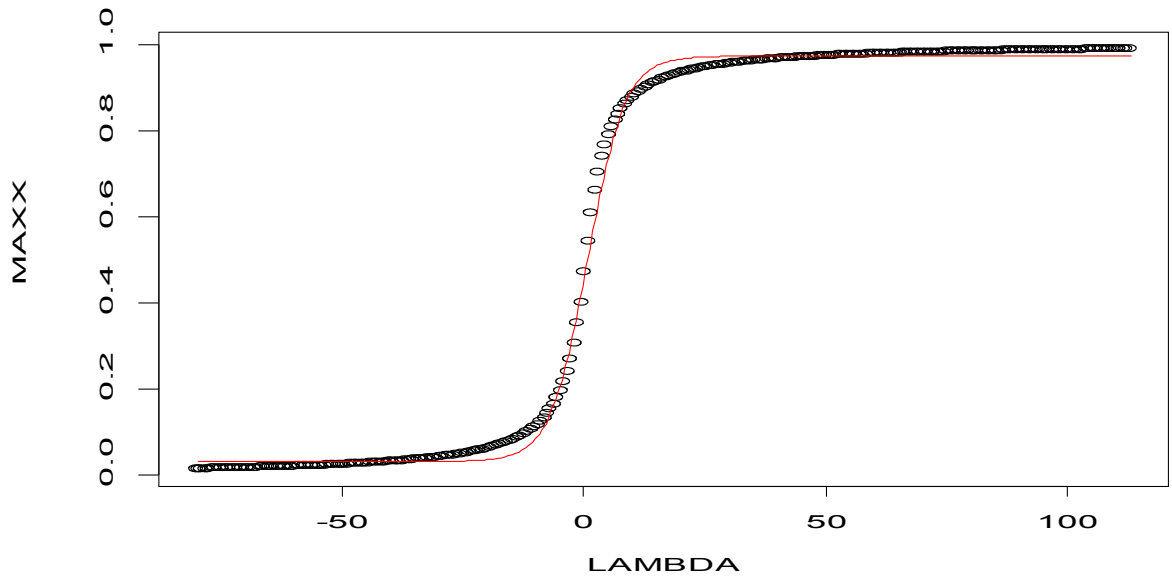
$$y(x)=\frac{a}{1+b*e^{-c*x}}+d$$

otteniamo

```
> fit2<-nls(MAXX ~ (a/(1+b*exp(-c*LAMBDA))+d),
start=list(a=1,b=1,c=1, d=0))
fit2

Nonlinear regression model
  model:  MAXX ~ (a/(1 + b * exp(-c * LAMBDA)) + d)
   data:  parent.frame()
      a       b       c       d
0.94160 1.24525 0.26147 0.03263
 residual sum-of-squares: 0.09683

Number of iterations to convergence: 9
Achieved convergence tolerance: 8.913e-06
```

ovvero y = (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*x)))+ 0.03263

```
> plot(LAMBDA, MAXX)
> lines(LAMBDA, predict(fit2), col="red")
```



Migliore ma non ottimale.

Visto (e preso per buono) il fit della logistica vogliamo far coincidere il valore medio della funzione con il coefficiente di avversione al rischio del valore medio della distribuzione redditi.

Il modello ora è

```
> LOGIT <- (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*LAMBDA)))+ 0.03263
```

in 0 vale

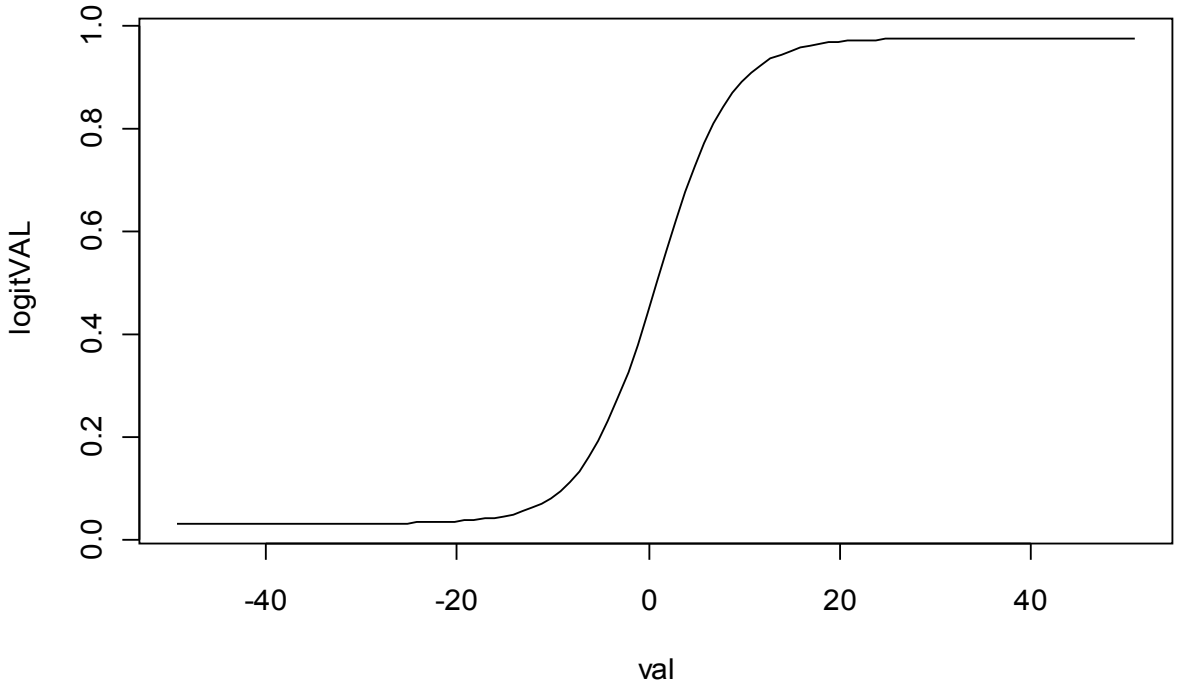
```
> (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*0)))+ 0.03263
[1] 0.4520042
```

in 0.78313 vale

```
> (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*0.78313)))+ 0.03263
[1] 0.5
```

Ora per poter ricavare gli altri punti dobbiamo agire con accuratezza: diciamo che tronchiamo la logistica nell'intorno (-50+0.78313):(50+0.78313) i cui valori corrispondono alle percentuali di portafoglio delle attività di minor e maggior rischio e di cui 0.5 (50%) è il punto medio.

```
> val <- c((-50+0.78313):(50+0.78313))
> logitVAL <- (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*val)))+ 0.03263

> summary(logitVAL)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.03263 0.03397 0.50000 0.50290 0.97280 0.97420

> plot(val, logitVAL, type="l")
```



Dovremo prendere i valori corrispondenti alle percentuali di portafoglio (**logitVAL**) e metterli in corrispondenza con i quantili della distribuzione normalizzata dei redditi la cui media e varianza corrispondono (circa) a

$$media = \lambda_M = \ln E[x] - \frac{\xi^2}{2} = 9.422763$$

$$varianza = \xi^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) = 0.276466$$

tenendo però conto della traslazione che vogliamo operare facendo coincidere il 50% della percentuale di portafoglio titoli con il quantile corrispondente al lnE[x] (logaritmo del reddito medio).

```
> PROB <- c(0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45,
0.50, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95)
> QUANT <- qnorm(p=PROB,mean= 9.422763,sd=0.525802149)
> QUANT
[1]8.557895 8.748920 8.877804 8.980237 9.068115 9.147032  9.220161
[8]9.289553 9.356690 9.422763 9.488836 9.555973 9.625365  9.698494
[15]  9.777411  9.865289  9.967722 10.096606 10.287631

>log(14200) =  9.560997
> pnorm(q=9.560997,mean= 9.422763,sd=0.525802149)
[1] 0.6036866

> expQUANT <- exp(QUANT)   Redditi
> expQUANT
 [1] 5207.710  6303.879  7171.027  7944.513  8674.256  9386.541
 [7] 10098.687
 [8] 10824.340 11576.008 12366.704 13211.408 14128.841 15144.085
[14] 16293.050
[15] 17630.950 19250.441 21326.845 24260.519 29367.109

> ARFAP <- 1/exp(QUANT)    λ_FAP(x)=1/x
> ARFAP
[1] 1.920230e-04 1.586325e-04 1.394500e-04 1.258730e-04 1.152837e-
04
[6] 1.065355e-04 9.902278e-05 9.238439e-05 8.638556e-05 8.086229e-
05
[11]7.569216e-05 7.077721e-05 6.603238e-05 6.137586e-05 5.671844e-
05
[16] 5.194686e-05 4.688926e-05 4.121923e-05 3.405170e-05
```

Abbiamo calcolato i quantili (**QUANT**) della distribuzione normalizzata dei redditi (log-normale), i redditi corrispondenti (**expQUANT**), ed i coefficienti di Finetti-Arrow-Pratt (**FAP**) della funzione di utilità logaritmica: ora vogliamo associare questi quantili ai valori dei lambda della funzione logistica corrispondenti alle percentuali di portafoglio.

PROBABILITA'	Reddito (x)	log(Reddito)	$\lambda_{FAP}(x)=1/x$
0,05	5207,71	8,5579	1.920230e-04
0,1	6303,88	8,7489	1.586325e-04
0,15	7171,03	8,8778	1.394500e-04
0,2	7944,51	8,9802	1.258730e-04
0,25	8674,26	9,0681	1.152837e-04
0,3	9386,54	9,1470	1.065355e-04
0,35	10098,69	9,2202	9.902278e-05
0,4	10824,34	9,2896	9.238439e-05
0,45	11576,01	9,3567	8.638556e-05
0,5	12366,7 ~ M[x]	9,4228	8.086229e-05
0,55	13211,41	9,4888	7.569216e-05
0,6	14128,84 ~ E[x]	9,5560	7.077721e-05
0,65	15144,09	9,6254	6.603238e-05
0,7	16293,05	9,6985	6.137586e-05
0,75	17630,95	9,7774	5.671844e-05
0,8	19250,44	9,8653	5.194686e-05
0,85	21326,85	9,9677	4.688926e-05
0,9	24260,52	10,0966	4.121923e-05
0,95	29367,11	10,2876	3.405170e-05

Calcoliamo i valori λ_i (**QUANTVAL**) della funzione logistica corrispondenti alle percentuali di portafoglio (**logitVAL**): il codice utilizzato è riportato sotto

```
#Quantile Core function 2

B <- 3000
VAL <- c(1:B)
LOGITVAL <- c(1:B)
MINVAL <- c(1:B)
MAXVAL <- c(1:B)
QUANTVAL <-c(1:length(PROB))

for(j in 1:length(PROB)){

val <- (-50 + 0.78313)

   for(i in 1:B){

   LOGITVAL[i] = (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*val)))+ 0.03263
   VAL[i] = val
```

```
   if(LOGITVAL[i]<= PROB[j]) {MINVAL[i]= 0
                              MAXVAL[i]=1000}

   else { if(VAL[i]<0) {MINVAL[i] = VAL[i]
                        QUANTVAL[j] = min(MINVAL)}

          if(VAL[i] == 0) {QUANTVAL[j]= 0.4520042}

          else {MAXVAL[i] = VAL[i]
                QUANTVAL[j] = min(MAXVAL)}
        }

   val <- val + 0.1

   }
}
```

```
> Redd <- c(5207.71, 6303.88, 7171.03 , 7944.51 , 8674.26,
9386.54,    10098.69,  10824.34,  11576.01,12366.7,    13211.41,
14128.84,  15144.09,  16293.05,  17630.95,  19250.44,    21326.85,
24260.52, 29367.11)

> log(Redd)
[1]  8.557895  8.748921  8.877805  8.980236  9.068115  9.147032
9.220161
[8]  9.289553  9.356690  9.422763  9.488836  9.555973  9.625366
9.698494
[15] 9.777411 9.865289 9.967722 10.096606 10.287631
```

$$\frac{\xi^2}{2}=0.13823395$$

```
> log(Redd) + 0.13823395
[1]  8.696129  8.887155  9.016039  9.118470  9.206349  9.285266  9.358395
[8]  9.427787  9.494924  9.560997  9.627070  9.694207  9.763600  9.836728
[15]  9.915645 10.003523 10.105956 10.234840 10.425865

> QUANTVAL <- c(-14.31687,   -8.91687,   -6.51687,   -5.01687,
-3.71687,   -2.61687,   -1.71687, -0.81687,   -0.01687,   0.88313,
1.68313,   2.48313,   3.38313,   4.28313,   5.38313,   6.58313,
8.08313, 10.28313, 14.78313)
```

$\ln_{25} x$ = 9.206349 ~ 25% del portafoglio ~ -3.71687 $\lambda_{l.25}$

$\ln_{40} x$ = lnM[x] = 9.427787 ~ 40% del portafoglio ~ -0.81687 $\lambda_{l.40}$

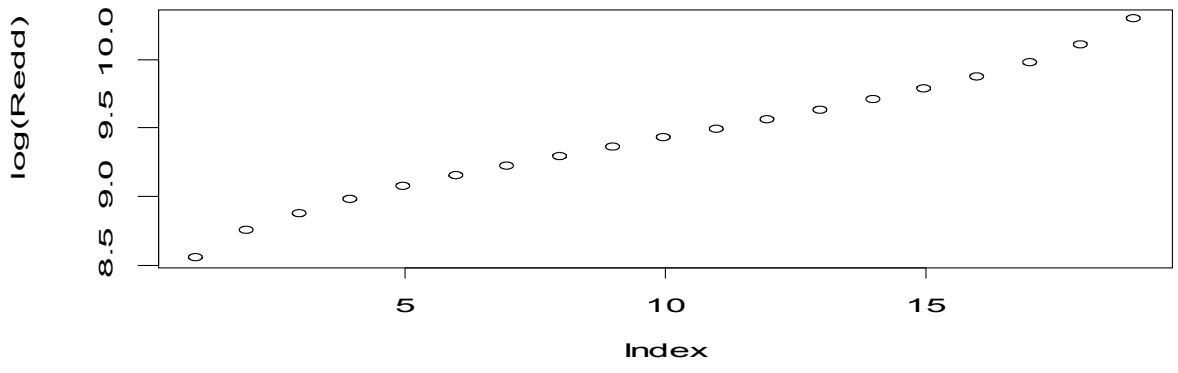
$\ln_{50} x$ = lnE[x] = 9.560997 ~ 50% del portafoglio ~ 0.88313 $\lambda_{l.50}$

$\ln_{75} x$ = 9.915645 ~ 75%del portafoglio ~ 5.38313 $\lambda_{l.75}$

Che vuol dire che secondo il modello la classe mediana dei risparmiatori, relativamente più numerosa, tenuto conto delle dovute distorsioni, investe circa il 40% delle proprie attività nei mercati finanziari, proporzione che si può riscontrare anche nell'allocazione del portafoglio titoli, tra attività più o meno rischiose.

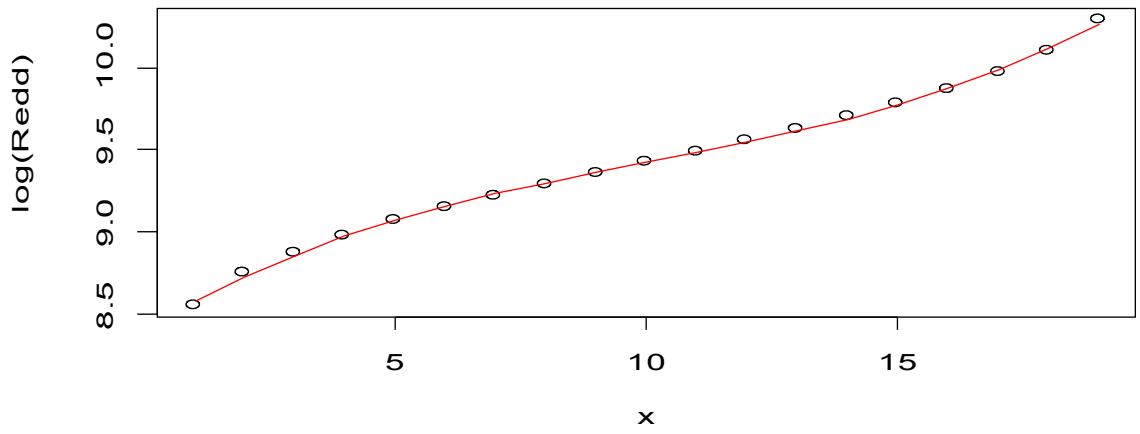
Reddito	$\lambda_{FAP}(x)=1/x$	λ_I
7171,03	1.394500e-04	-14,3169
7944,51	1.258730e-04	-8,9169
8674,26	1.152837e-04	-6,5169
9386,54	1.065355e-04	-5,0169
10098,69	9.902278e-05	-3,7169
10824,34	9.238439e-05	-2,6169
11576,01	8.638556e-05	-1,7169
12366,7 ~ M[x]	8.086229e-05	-0,8169
13211,41	7.569216e-05	-0,0169
14128,84 ~ E[x]	7.077721e-05	0,88313
15144,09	6.603238e-05	1,6831
16293,05	6.137586e-05	2,4831
17630,95	5.671844e-05	3,3831
19250,44	5.194686e-05	4,2831
21326,85	4.688926e-05	5,3831
24260,52	4.121923e-05	6,5831
29367,11	3.405170e-05	6,5831
34195,8	2.924336e-05	10,2831
41709,12	2.397557e-05	14,7831

Come si può notare la distribuzione dei log-redditi è "quasi normale"



i due ultimi valori della colonna Reddito li interpoliamo dalla "curva" dei valori log(Redd) ottenendo

```
> x <- c(1:19)
> fit3<-lm(log(Redd) ~ poly(x, 3, raw=TRUE))
> fit3

Call:
lm(formula = log(Redd) ~ poly(x, 3, raw = TRUE))

Coefficients:
(Intercept)  poly(x, 3, raw = TRUE)1  poly(x, 3, raw = TRUE)2
8.4057719    0.1855963                -0.0125846
poly(x, 3, raw = TRUE)3
0.0004195

> plot(x, log(Redd))
> points(x, predict(fit3), type="l", col="red")
```




```
x <- c(1:21)
y <- 8.4057719 + 0.1855963*x -0.0125846*x^2 + 0.0004195*x^3
> y
[1]8.579203 8.729982 8.860626 8.973651 9.071576 9.156916  9.232189
[8]9.299912 9.362602 9.422775 9.482949 9.545641 9.613368  9.688647
[15]9.773994  9.871927  9.984963  10.115619  10.266412  10.439858
10.638475

> exp(10.439858)
[1] 34195.80
> exp(10.638475)
[1] 41709.12
>  1/exp(10.439858)
[1] 2.924336e-05
> 1/exp(10.638475)
[1] 2.397557e-05
```

In sintesi - Abbiamo calcolato i redditi ed il loro logaritmo ottenendo i quantili della distribuzione normale. Abbiamo trasformato questi ultimi traslando tutti i valori di $\xi^2/2$ ed abbiamo messo in corrispondenza biunivoca questi con i quantili della distribuzione logistica corrispondenti alle diverse percentuali di portafoglio ottenendo una *"scala di rischio temperata"*. Questa tiene conto del livello dei redditi individuali e della percezione del livello relativo, in relazione al baricentro della distribuzione collettiva. La funzione di utilità logaritmica, permettendo di confrontare i pesi normalizzati nella trasformazione della distribuzione delle quantità, coglie lo *"scarto di scala"*.

Da notare infatti che, seguendo lo sviluppo della distribuzione log-normale, ricordandoci che M[x] è la mediana della distribuzione redditi, μ la media e σ^2 la varianza

$$\xi^2=\ln(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2})=0.2764679 \text{ varianza log-norm;}$$

$$U(M[x])=U(z)=\ln E[x]-\frac{\xi^2}{2}=9.42279 \text{ valore atteso log-norm.}$$

Sappiamo che z = $U^{-1}[E[U[x]]]$:per una funzione di utilità del tipo $U(x)=\ln(x)$, con una serie di passaggi otteniamo

$$z=e^{E[\ln[x]]};\quad \ln z=E[\ln x];\quad \ln E[x]-\frac{\xi^2}{2}=E[\ln x]$$

che è come scrivere

$$E[U(x)]=U(E[x])-\frac{1}{2}U''(E[x])V[x]$$

con $-\frac{\xi^2}{2}=-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\mu^2}$; infatti per $\frac{\sigma^2}{\mu^2}$ piccolo (<0.30, nell'esempio 0.318464689) vale l'approssimazione $\ln(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2})=\frac{\sigma^2}{\mu^2}$. Il che rende il tutto molto suggestivo (ed utile).

N.B.: La medesima operazione di corrispondenza biunivoca vale ovviamente per i λ_p calcolati in precedenza: per economia di esposizione non lo si è fatto.

5.4 Appendice E

```
#funzione logaritmica
f <- function(x) -lambda*((1+MTBR)*x + (1+MCPR)*(1-x)) + log(1 +
(1/factorial(2))*(lambda^2)*(((1+MTBR)*x + (1+MCPR)*(1-
x))^2)*(VTBR*x^2 + VCPR*(1-x)^2 + 2*COVCT*x*(1-x)) -
(1/factorial(3))*(lambda^3)*(((1+MTBR)*x + (1+MCPR)*(1-
x))^3)*(STBR*(x^3) + 3*MU21*(x^2)*(1-x) + 3*MU12*x*((1-x)^2) +
SCPR*(1-x)^3) + (1/factorial(4))*(lambda^4)*(((1+MTBR)*x +
(1+MCPR)*(1-x))^4)*(KTBR*(x^4) + 4*MU31*(x^3)*(1-x) +
6*MU22*(x^2)*((1-x)^2) + 4*MU13*x*((1-x)^3) + KCPR*((1-x)^4)))

#funzione esponenziale
f <- function(x) exp(-lambda*((1+MTBR)*x + (1+MCPR)*(1-x)))*(1 +
(1/factorial(2))*(lambda^2)*(((1+MTBR)*x + (1+MCPR)*(1-
x))^2)*(VTBR*x^2 + VCPR*(1-x)^2 + 2*COVCT*x*(1-x)) -
(1/factorial(3))*(lambda^3)*(((1+MTBR)*x + (1+MCPR)*(1-
x))^3)*(STBR*(x^3) + 3*MU21*(x^2)*(1-x) + 3*MU12*x*((1-x)^2) +
SCPR*(1-x)^3) + (1/factorial(4))*(lambda^4)*(((1+MTBR)*x +
(1+MCPR)*(1-x))^4)*(KTBR*(x^4) + 4*MU31*(x^3)*(1-x) +
6*MU22*(x^2)*((1-x)^2) + 4*MU13*x*((1-x)^3) + KCPR*((1-x)^4)))

#Core function portafoglio

#esponenziale
fp <- function(z) exp(- lambdap*((Erm)*z + (Erp)*(1-z)))*(1+
((lambdap^2)/factorial(2))*(VARrp*(1-z)^2)-
((lambdap^3)/factorial(3))*(SKEWrp*(1-z)^3)+
((lambdap^4)/factorial(4))*(KURTrp*(1-z)^4))

#logaritmica
fp <- function(z) - lambdap*((Erm)*z + (Erp)*(1-z)) + log(1+
((lambdap^2)/factorial(2))*(VARrp*(1-z)^2)-
((lambdap^3)/factorial(3))*(SKEWrp*(1-z)^3)+
((lambdap^4)/factorial(4))*(KURTrp*(1-z)^4))

#lineare1
fp <- function(z) ((Erp)*z + (Erm)*(1-z)) -
((lambdap)/factorial(2))*(((Erp)*z + (Erm)*(1-
z))^2)*(VARrp*(z)^2)-
((lambdap^2)/factorial(3))*(((Erp)*z + (Erm)*(1-
z))^3)*(SKEWrp*(z)^3)+
((lambdap^3)/factorial(4))*(((Erp)*z + (Erm)*(1-
z))^4)*(KURTrp*(z)^4)

#lineare2
fp <- function(z) 1- lambdap*((Erm)*z + (Erp)*(1-z)) +
((lambdap^2)/factorial(2))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-#z))^2)*(VARrp*(1-
z)^2)- ((lambdap^3)/factorial(3))*(((Erm)*z + (Erp)*(1-
z))^3)*(SKEWrp*(1-z)^3)+((lambdap^4)/factorial(4))*(((Erm)*z +
(Erp)*(1-z))^4)*(KURTrp*(1-z)^4)
```

```
#Quantile Core function 1

B <- 10000
VAL <- c(1:B)
LOGITVAL <- c(1:B)
EVAL <- c(1:B)
QUANTVAL <-c(1:length(PROB))
for(j in 1:length(PROB)){
val = 0.0001
   for(i in 1:B){
   LOGITVAL[i] = y <- 0.77039 + 0.08813*log(val)
   VAL[i] = val
   if(LOGITVAL[i]<= PROB[j]) {EVAL[i]= 1000}
   else  {EVAL[i] = VAL[i]
          QUANTVAL[j] = min(EVAL)}
   val <- val + 0.0001
   }
}

#Quantile Core function 2

B <- 3000
VAL <- c(1:B)
LOGITVAL <- c(1:B)
MINVAL <- c(1:B)
MAXVAL <- c(1:B)
QUANTVAL <-c(1:length(PROB))
for(j in 1:length(PROB)){
val <- (-50 + 0.78313)
   for(i in 1:B){
   LOGITVAL[i] = (0.94160/(1+ 1.24525*exp(-0.26147*val)))+ 0.03263
   VAL[i] = val
   if(LOGITVAL[i]<= PROB[j]) {MINVAL[i]= 0
                              MAXVAL[i]=1000}
   else { if(VAL[i]<0) {MINVAL[i] = VAL[i]
                       QUANTVAL[j] = min(MINVAL)}
          if(VAL[i] == 0) {QUANTVAL[j]= 0.4520042}
          else {MAXVAL[i] = VAL[i]
                QUANTVAL[j] = min(MAXVAL)}
        }
   val <- val + 0.1
   }
}
```

Appendice generale

Comandi elementari

R è un linguaggio basato su espressioni dalla sintassi semplice ed è **case sensitive**. I comandi elementari consistono o di espressioni (**=**) o di assegnzioni(**<-**). La riga di comando è individuata dal simbolo di prompt(**>**).

Le entità che R crea e manipola sono note come oggetti. Questi possono essere variabili, array di numeri, caratteri, stringhe, funzioni e più in generale strutture costruite a partire da tali componenti.

- Il comando **object()** o **ls()** può essere utilizzato per visualizzare i nomi degli oggetti memorizzati in un dato momento in R;
- il comando **rm()** è utilizzato per eliminare oggetti dallo spazio di lavoro.

Alla fine di ogni sessione R da la possibilità di salvare tutto il lavoro in file **.RData**. Lo spazio di lavoro è comunque salvabile volta per volta nel file **.RHistory**.

Gli oggetti di base

R opera su strutture di dati; la più semplice di tali strutture è il vettore numerico. L'assegnazione ad una variabile di un numero arbitrario di argomenti in forma di vettore viene eseguito con la funzione **c()** o **assign()**:

```
> x <- c(x1, x2, …, xn)
```

oppure

```
> assign("x", c(x1, x2, …, xn))
```

Gli operatori aritmetici elementari sono **+**, **-**, *****, **/** e **^**. In aggiunta sono disponibili le seguenti funzioni matematiche comuni: **log()**, **exp()**, **sin()**, **cos()**, **tan()**, **sqrt()**, **max()**, **min()** e così via. Altre funzioni disponibili sono **range()** che restituisce un c(min(x), max(x)); **pmin() pmax()** che restituiscono il minimo ed il massimo in parallelo tra i corrispondenti elementi dei vettori; **which()** che restituisce l'indice per cui la condizione all'interno del comando è TRUE (es. which.min() which.max() restituiscono

l'indice o posizione dell'elemento minimo o massimo di un argomento); poi **lenght()** che restituisce il numero di elementi di un argomento; **sort()** e **order()** che restituiscono un vettore ordinato ed un vettore di indici del corrispondenti all'ordinamento del vettore passato.
E' possibile in R utilizzare i **numeri complessi** nella loro definizione tipica (con **+ni**). E' possibile generare **sequenze** (con le funzioni **seq()** e **rep()**), vettori logici (attraverso gli operatori **<**, **<=**, **>**, **>=**, **==**, **!=**, **&**, **|**, **!**, TRUE=**1**, FALSE=**0**). I valori mancanti vengono evidenziati con un **NA** (Not available) o **Nan** (Not a Number).
E' possibile operare su vettori di caratteri con la funzione **paste()** che prende un numero arbitrario di argomenti e li concatena in un'unica **stringa**.

I **vettori di indic**i selezionano e modificano i sottoinsiemi di un insieme di dati (es. x[6] è l'elemento 6 del vettore x; funziona anche sulle matrici con l'uso di ,): il criterio agisce su vettori di interi, logici o stringhe di caratteri.

I **fattori** sono oggetti vettore che possono essere utilizzati per specificare una classificazione discreta delle componenti di altri vettori della stessa lunghezza: possono essre ordinati e non ordinati (un fattore non ordinato può essere visto come una variabile qualitativa sconnessa, un fattore ordinato come una variabile qualitativa ordinabile).
Con la funzione **factor()** si crea un fattore assegnabile (es. una lista di province); con la funzione **levels()** si determinano i livelli. Con la funzione **tapply()** si applica una funzione ad ogni gruppo di elementi del primo argomento definito dai livelli del secondo argomento come se fossero strutture vettore separate. Il risultato è una struttura della stessa lunghezza del numero dei livelli del fattore. Altre funzioni simili sono **apply()**, **lapply()** ed **sapply()**.

Altri tipi di oggetto sono **array** e **matrici**. Un array può essere considerato una collezione di numeri con indici multipli. Una matrice è un particolare array con due indici. Un vettore può essere trasformato in un array modificando il suo attributo **dim()**. La quantità **a[, , ,]** sta ad indicare un intero array che corrisponde al suo utilizzo: **a**. Per creare matrici è disponibile il comando **matrix()**. In generale la funzione **array()** ha la seguente sintassi:

```
> Z <- array(vettore di dati, vettore dim)
```

L'attributo dim() degli operandi generalmente deve essere lo stesso. Gli operatori per il calcolo matriciale sono: **%*%** (righe per colonne), **t()** (trasposizione), **det()** (determinante), **diag()** (diagonale principale), **eigen()** (**...$val** ed **...$vec** danno rispettivamente gli autovalori e gli autovettori).

Le funzioni **cbind()** e **rbind()** servono per costruire matrici partendo da vettori o da altre matrici. cbind() forma matrici partendo da vettori o legando matrici orizzontalmente; rbind() verticalmente. Queste due funzioni rispettano l'attributo dim() a differenza di c() che lo cancella.
Il modo migliore per forzare un array a ritornare ad essere un vettore è il comando **as.vector()**.

In R sono presenti gli oggetti **Liste** e **data frame**. Nelle liste le componenti sono sempre numerate e ci si può riferire ad esse attraverso gli indici o specificando il loro nome (es lista$nome). Nuove liste possono essere formate da oggetti già esistenti utilizzando la funzione **list()**. Se i nomi sono omessi le componenti sono solo numerate. Le liste possono essere concatenate.

Un data frame può essere visto come una matrice con colonne, in generale, di modi ed attributi differenti; formalmente è una lista di classe **data.frame**. Ci sono restrizioni che vengono fatte nei data frame e specificamente nelle componenti che devono essere vettori (numerici, di carattere o logici), fattori, matrici numeriche, liste, od altri data frame; matrici, liste e data frame forniscono tante variabili al nuovo data frame per quante sono le colonne, gli elementi o le variabili che hanno, rispettivamente; i vettori numerici sono inclusi così come sono, i vettori non numerici sono forzati ad essere fattori, i livelli dei quali sono gli unici valori che appaiono nel vettore; strutture vettore che appaiono come componenti del data frame devono tutte avere la stessa ampiezza di riga.

La funzione **attach()** con argomento un data frame serve a posizionare il data frame al posto 2 nel cammino di ricerca, permettendo di utilizzare immediatamente le variabili che compongono il data frame senza definirle, verificato che non esistono già nello spazio di lavoro delle variabili con quel nome. In ogni caso le operazioni fatte non cambiano il contenuto dele corrispettive componenti del data frame. Per effettuare un cambio permanente bisogna utilizzare il comando **$**, che può essere utilizzato anche per richiamare le componenti senza fare ricorso al comando attach(). Per rilasciare il data frame si utilizza la funzione **detach()**. La funzione **search()** mostra il cammino di ricerca corrente. La funzione **ls()** può anche essere utilizzata per esaminare il contenuto di qualsiasi altra posizione del cammino di ricerca.

Attributi intrinseci degli oggetti

Le entità su cui R opera sono tecnicamente note come oggetti. I vettori sono note come **strutture atomiche**, perchè le loro

componenti sono tutte dello stesso tipo o modo. Le liste, invece sono note come **strutture ricorsive**, dato che le loro componenti possono essere esse stesse delle liste. Le altre strutture ricorsive sono quelle di modo, funzione ed espressione.
Per **modo** di un oggetto si intende quindi il tipo base dei suoi costituenti fondamentali. Questo è un caso speciale di **attributo** di un oggetto. Gli attributi di un oggetto forniscono informazioni circa lo stesso oggetto. Un altro tipo di attributo di un qualsiasi oggetto è la sua **lunghezza**, che consiste nel numero di elementi che compongono l'oggetto. Ogni oggetto in R deve possedere almeno questi due attributi. In ogni caso nuove componenti possono essere aggiunte ad un qualunque oggetto semplicemente considerando una operazione di assegnazione con un valore dell'indice valido in quel momento.

La funzione **attributes(**oggetto**)** dà una lista di tutti gli attributi non intrinseci attualmente definiti per quell'oggetto. La funzione **attr(**oggetto, nome**)** può essere utilizzata per selezionare uno specifico attributo. In ogni caso queste funzioni non sono molto utilizate.

Un attributo speciale noto come classe dell'oggetto è utilizzato per permettere uno stile di programmazione orientata ad oggetti in R. Per rimuovere temporaneamente gli effetti della classe, si usa la funzone **unclass()**.

Con il comando **str()** possiamo accedere alla struttura interna di oggetti complessi[35].

Lettura di dati da file

Per quanto concerne la lettura di dati è conveniente preliminarmente generare un file di dati in formato ASCII, disponendoli come si farebbe in una matrice di dati e mettere questo file nella cartella di lavoro corrente. Fatto questo si può utilizzare la funzione **read.table()** per leggere l'intero data frame. Se la prima riga del file contiene l'intestazione delle variabili ed ogni riga del file è preceduta dall'identificatore di riga (01, 02, ecc.), allora read.table interpreterà la prima riga del file come una riga dove sono contenuti i nomi delle variabili, assegnando ciascun nome alle varibili del data frame. Se gli identificatori di riga non sono presenti, ma nella prima riga si hanno i nomi delle variabili, allora si può utilizzare il comando read.table("mio.txt", header = TRUE). Se invece nel file di dati non si hanno i nomi delle variabili nella prima riga, ma sono presenti gli identificatori di riga all'inizio di ogni riga allora si usa read.table("mio.txt", row.names = 1).

35 http://www.economia.unimi.it/projects/corsor/lez1.html

La funzione **scan()** si può utilizzare in alternativa con una sintassi più articolata. Più semplice risulta la funzione **read.csv()** il cui argomento è un file .csv precedentemente creato dal foglio di calcolo, utilizzata in questa sede.
Esiste poi la bibliotaca dati di R reperibile con il comando **data()**, anch'essa precedentemente incontrata.

Tabelle e grafici

Per quanto concerne l'elenco dei tipi di strutture e grafici disponibili in R è possibile utilizzare il comando **demo(graphics)**.

Calcoli di tipo statistico

Per quanto concerne i calcoli di tipo statistico, oltre alle funzioni **mean()**, **median()**, **var()**, **sd()**, **cov()**, **cor()** tipiche, R ha una ricca biblioteca di funzioni e modelli senza contare i package integrativi liberamente scaricabili. **Summary()** fornisce una sintesi della distribuzione di dati in oggetto. Un elenco delle distribuizioni di probabilità utilizzabili è fornito nel package **base**. Per quanto concerne i modelli lineari sono presenti varie modalità di esecuzione con l'operatore **~**. **I()** è un inibitore di operatori. **lm()**[36] è la funzione base per adattare modelli lineari multipli ordinari. **nls()** quella per modelli non lineari.

Le informazioni sul modello adattato possono essere visualizzate utilizzando opportune funzioni, elencate di seguito: **add1**, **coef**, **effects**, **kappa**, **predict**, **residuals**, **alias**, **deviance**, **family**, **labels**, **print**, **step**, **anova**, **drop1**, **formula**, **plot**, **proj**, **summary**.
I comandi più comunemente usati sono:

anova(oggetto)	Restituisce la tavola di analisi della varianza.
deviance(oggetto)	Somma dei quadrati residua, nel caso pesata.
formula(oggetto)	Estrae l'espressione del modello.
plot(oggetto)	Produce quattro grafici, utilizzati per l'analisi dei residui.
predict(oggetto, newdata = data.frame)	Il data frame fornito deve avere variabili specificate con le stesse etichette delle originali. Restituisce un vettore od una matrice di valori predetti che corrispondono ai

36 Esiste la funzione **glm()** per stimare modlli GLM.

	valori che determinano le variabili in data.frame.
print(oggetto)	Stampa una versione concisa dell'oggetto.
residuals(oggetto) **resid(oggetto)**	Estrae la matrice di residui, nel caso pesati.
step(oggetto)	Seleziona un opportuno modello aggiungendo o eliminando termini e preservando gerarchie. Viene restituito il modello con il più grande valore AIC (Akaike Information Criterion) ottenuto nella ricerca stepwise.
summary(oggetto)	Stampa un ampio riassunto dei risultati dell'analisi di regressione.

La funzione **update()** permette di adattare un modello che differisce da uno precedentemente adattato per qualche termine aggiuntivo o rimosso:

```
>nuovo.modello <- update(vecchio.modello, nuova.formula)
```

In nuova.formula il simbolo . può essere essere usato per indicare la corrispondente parte della vecchia formula. Per esempio

```
> fm5 <- lm(y ~ x1 + x2 + x3 + x4 + x5, data = production)
> fm6 <- update(fm5, . ~ . + x6)
> smf6 <- update (fm6, sqrt(.) ~ .)
```

adatterà una regressione multipla a cinque varibili, con le variabili prese dal data frame production, adatta un ulteriore modello che include un sesto regressore x6 e adatta una variante sul modello prendendo come variabile di risposta la radice quadrata di y. Il simbolo . Può essere usato anche in altri contesti . Ad esempio

```
> fmpieno <- lm(y ~ . , data = production)
```

adatterà rispettivamente un modello con risposta y e regressori tutte le altre variabili presenti nel data frame production.

Predict() ed il filtro di Kalman

predict() è una funzione che proietta i valori di oggetti di una data classe secondo il metodo appartenente alla classe: per predict.Arima si tratta del metodo di Kalman. R ha un bagaglio

multiplo di funzioni per la perequazione, il filtraggio e la valutazione di verosomiglinza di un modello a spazi di stato che usa filtri di Kalman. La più frequentemente menzionata è la famiglia di funzioni **KalmanLike**[37], ma queste lavorano su modelli a spazi di stato univariati. Per questa ragione i metodi nel pacchetto **"dse1"** (**SS.1()** ed altre) e **"sspir"** sono spesso preferiti. Data la maggiore semplicità, descriviamo le funzioni nel pacchetto "sspir".

In primo luogo si utilizza una funzione per generare un oggetto modello a spazi di stato, poi si può filtrare con il metodo di Kalman o opzionalmente perequare il risultato filtrato. La funzione per la generazione dell'ogggetto spazi di stato è **SS().** Chiamandola modello a spazi di stato possiamo descriverla come

$$y_t = F'_t \theta_t + v_t$$
$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$$

dove

$$v_t \sim N(0, V_t), \quad w_t \sim N(0, W_t).$$

θ_t è il vettore di stato non osservato, ed y_t è il vettore di dati osservato. Per il filtraggio di Kalman, il valore iniziale di θ è preso da $N(m_0, C_0)$.
A causa della possibile variazione di tempo insita nella natura di questo modello generale, le matrici dei coefficienti devono essere date come funzioni. Un cavillo da ricordare è che l'input **Fmat** è la trasposta di F_t. Dopo aver scritto le funzioni di input F_t, G_t, V_t e W_t ed aver generato le variabili di input ϕ (un vettore di parametri da usare attraverso le funzioni che generano F_t, G_t, V_t e W_t) m_0, e C_0, possiamo far girare SS() per creare il modello a spazi di stato. Quindi possiamo far girare **Kfilter()** sul modello oggetto per filtrare ed ottenere la log-verosomiglianza. Questa riporta una copia del modello con i parametri stimati inclusi. Se vogliamo far girare il perequatore di Kalman, dobbiamo prendere l'output del modello **Kfilter()** ad applicare **smoother()** su di esso.
La funzione nel pacchetto "dse1" sembra più flessibile ma più complicata da inizializzare.

Elementi di programmazione in R

In R i comandi possono essere raggruppati usando parentesi graffe

{expr 1; …; expr n;**}**

37 http://www.biostat.jhsph.edu/~qli/biostatistics_r_doc/library/stats/html/KalmanLike.html

nel qual caso il valore del gruppo di istruzioni è il risultato dell'ultima espressione del gruppo.
E' possibile usare espressioni condizonali del tipo

```
> if (expr1) expr2 else expr3
```

dove expr1 ha come risultato un valore logico. Nell'espressione logica si possono utilizzare gli operatori relazionali: **x < y**, **x > y**, **x <= y**, **x >= y**, **x == y** e **x != y**. Si possono anche utilizzare gli operatori NOT (**!**), AND (**&** o **&&**) e OR (**|** o **||**): la forma più corta esegue confronti elemento per elemento in modo simile agli operatori aritmetici, la forma più lunga valuta da sinistra a destra l'espressione esaminando solo il primo elemento di ogni vettore. Il risultato del precedente comando è pari ad expr2 se il risultato di expr1 è TRUE, altrimenti il risultato di questa espressione è expr3. La versione vettorizzata di if/else ha la forma **ifelse(**condizione, a, b**)** dove il risultato è un vettore pari alla componente di a o di b a seconda se di volta in volta il risultato di condizione è TRUE o FALSE.

Il costrutto loop ha la forma

```
> for (nome in expr1) expr2
```

dove nome è la variabile di loop ed expr1 è di solito una sequenza del tipo 1:20. Altri comandi per eseguire il loop sono

```
> repeat expr
> while(condizione) expr
```

Il comando **break** può essere usato per terminare qualsiasi loop ed è il solo modo per terminare un loop con repeat. Il comando **next** può essere usato per interrompere un qualsiasi ciclo e passare alle istruzioni successive al next. Con il ciclo for si possono costruire utili simulazoni, strumento valido per valutare il comportamento di statistiche (intese come funzioni di dati campionari) nell'universo campionario. Esse trovano largo impiego nello studio delle distribuzioni campionarie di stimatori e statistiche test quando la loro forma è ignota, oppure quando si vogliono accertare, anche solo per curiosità, i risultati teorici (cfr. predict())[38].

Si possono scrivere funzioni proprie definendo una assegnazione del tipo

```
>nome <- function(arg1, arg2, …) espressione
```

dove espressione può essere in realtà un gruppo di espressioni racchiuse da parentesi graffe:

38 Sull'implementazione di una simulazione Monte Carlo vedere Muggeo Ferrara "il linguaggio R: concetti introduttivi ed esempi" 2005 II ed. pg. 62

```
>nome <- function(arg1, arg2, …)
{
espressione1
espressione2
espressione3
...
}
```

Il risultato della funzione sarà il valore in ultima riga. Una chiamata di funzione è fatta di solito nel seguente modo:

```
> nome(arg1, arg2, …)
```

Scrivere delle funzioni è il modo più semplice in R per memorizzare una serie di comandi. Scritta una funzione si può usare il comando **edit(**nomefunzione**)** per richiamare un un editore di testo che visualizza il corpo della funzione che quindi, con piccole modifiche, può essere salvata. Le funzioni possono essere richiamate usando il comando **source(**"nomefile"**),** oppure utilizzando la voce "Source R code" dal menu "File". Ogni assegnazione ordinaria fatta in una funzione è locale e temporanea e viene persa quando si esce dalla funzione.

Dialogo Python/R: rpy

Nuovi recenti sviluppi hanno visto l'incremento delle possibilità di dialogo tra diverse piattaforme di programmazione. **Python/R** ed **SPSS/Python** rappresentano due casi interessanti.
Per quanto riguarda SPSS, la Programmability Extension permette di migliorare le capacità di SPSS utilizzando linguaggi di programmazione esterni come Python. Applicazioni scritte in Python e Visual Basic possono anche richiamare SPSS per condurre analisi o creare reports. I plug-in integrativi sono disponibili nel SPSS Developer Central Web Site, così come la Programmability Extension SDK che permette agli utenti di creare i propri plug-in integrativi. Un miglioramento aggiuntivo disponibile nella SPSS Programmability Extension è la nuova procedura data step nel plug-in integrativo Python, che permette di creare un nuovo file dati di SPSS creando simultaneamente variabili e casi.

Per quanto concerne **Python**, esso è un potente linguaggio di programmazione, ma occasionalmente abbiamo bisogno di risolvere problemi che possono essere più facilmente affrontabili in altri linguaggi più specializzati. Per l'analisi statistica e la visualizzazione dei dati, il linguaggio R è una scelta eccellente. Tuttavia R è si molto potente per la computazione numerica e statistica, ma è piuttosto ingombrante nella creazione di script tipici. Si vorrebbe quindi poter usare Python per lo scripting ed R per le potenzialità di calcolo statistco. Ciò è possibile grazie

al programma **rpy** che essenzialmente integra R come un modulo di Python[39].
Se si ha il contenuto in R, si può assegnare ad una **variabile** in Python la funzione di R; se si ha il contenuto in R si deve usare **assign()**.

Per importare una funzione si può utilzzare la sintassi

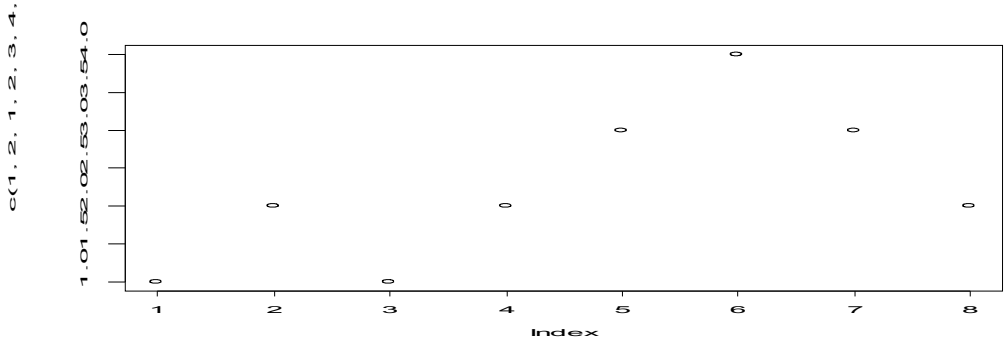
- import library **libreria; funzione()** ∈ **libreria**

```
>>>import libreria
>>>libreria.funzione()
```

oppure

- importo tutto dalla **funzione rpy**

```
>>>from rpy import *

Python 2.5.4 (r254:67916, Dec 23 2008, 15:10:54) [MSC v.1310 32
bit (Intel)] on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.

    ****************************************************************
**
    Personal firewall software may warn about the connection IDLE
    makes to its subprocess using this computer's internal
loopback
    interface.  This connection is not visible on any external
    interface and no data is sent to or received from the
Internet.
    ****************************************************************
**

IDLE 1.2.4
>>> from rpy import *
>>> s=[1,2,1,2,3,4,3,2]

>>>r.plot(s)
```

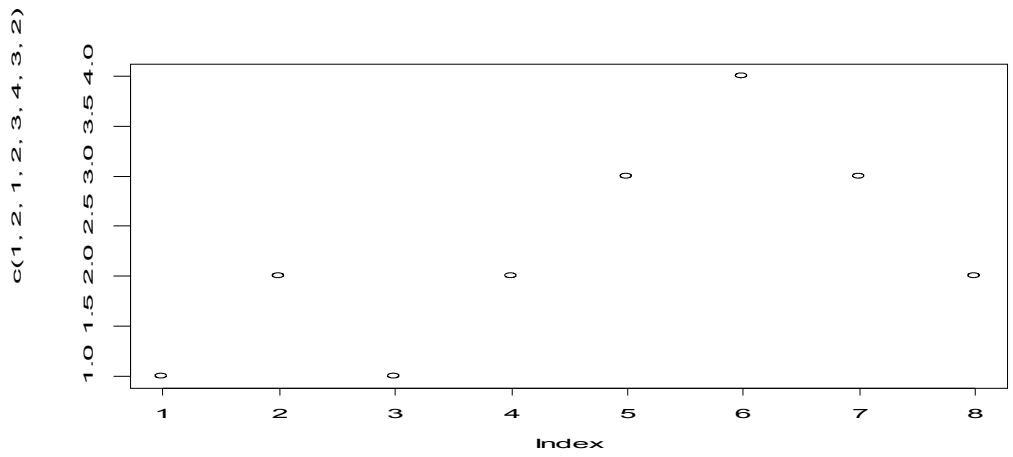


39 Dialogo Python R: http://rpy.sourceforge.net/

```
>>> summary=r.summary(s)
>>> summary
{'Min.': 1.0, '1st Qu.': 1.75, '3rd Qu.': 3.0, 'Median': 2.0,
'Max.': 4.0, 'Mean': 2.25}
```

r. è un instance della classe r e scriviamo la r di R come vista nella library di rpy. Unico accorgimento se la funzione di r ha un punto, esso è sostituito da **_**.
Altra sintassi disponibile non usa più il ponte costituito dall'oggetto r ma usa la funzione r() che manda stringhe di caratteri da eseguire ad R.

```
>>> r('a<-33')
33.0
>>> a=r.a
>>> a
33.0
>>> r.assign('s',s)
[1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2]
>>> r('plot(s)')
```




```
>>> r('summary(s)')
{'Min.': 1.0, '1st Qu.': 1.75, '3rd Qu.': 3.0, 'Median': 2.0,
'Max.': 4.0, 'Mean': 2.25}
```

Per ottenere tale risultato abbiamo installato il modulo **rpy** 2.7, **Python** 2.5.4, **pywin** (modulo per interazione tra python e windows affinchè possa trovare R) ed il modulo **Numpy**.

Importiamo i dati con R in Python attraverso rpy

```
>>> r('dati <- read.csv("C:/R/mibtel.csv", header = TRUE, sep =
";", na.string = " ")')

>>> r('attach(dati)')
<Robj object at 0x00A991E0>
```

```
>>> r('names(dati)')
['Date', 'Open', 'High', 'Low', 'Close', 'Volume', 'Adj.Close']

>>> r('summary(Close)')
{'Min.': 10540.0, '1st Qu.': 20460.0, '3rd Qu.': 29450.0,
'Median': 24620.0, 'Max.': 34820.0, 'Mean': 24630.0}

>>> Closepy = r.Close
>>> Closepy
[13879.0,  13574.0,  13338.0,  13414.0,  13548.0,  13539.0,  12974.0,
12855.0,  12420.0,  13116.0,  13217.0,  13068.0,  12709.0,  12678.0,
12113.0,  11990.0,  11754.0,  11558.0,  11629.0,  11368.0,  11414.0,
11175.0,  11175.0,  10544.0,  10740.0,  11172.0,  11808.0,  11530.0,
11816.0,  12526.0,  12774.0,  12494.0,  12614.0,  12639.0,  12804.0,
13466.0,  13514.0,  13614.0,  14088.0,  14238.0,  14149.0,  14421.0,
14531.0,  14834.0,  14673.0,  14370.0,  14349.0,  14093.0,  13940.0,
14249.0,  14361.0,  14508.0,  14167.0,  14185.0,  13816.0,  13883.0,
14103.0,  14359.0,  14535.0,  14734.0,  14526.0,  14738.0,  15219.0,
15527.0, 15680.0, 15993.0, 15958.0,
...
34015.0,  33830.0,  33358.0,  33577.0,  32593.0,  32647.0,  31777.0,
31759.0,  32195.0,  32210.0,  31945.0,  31562.0,  32836.0,  32278.0,
31423.0,  30972.0,  30968.0,  30065.0,  30301.0,  30122.0,  29467.0,
29018.0,  28404.0,  28765.0,  28780.0,  28402.0,  28191.0,  28765.0,
28580.0,  28509.0,  28329.0,  28092.0,  28421.0,  28441.0,  27711.0,
27503.0,  27198.0,  27067.0,  27342.0,  26439.0,  26848.0,  27454.0,
28094.0]
```

Importiamo i dati in Python tramite la libreria Python **xlrd** http://pypi.python.org/pypi/xlrd ed elaboriamoli con R attraverso rpy.

```
>>> import xlrd
>>> book = xlrd.open_workbook("C:\\Py\\mibtel.xls")
>>> print "The number of worksheets is", book.nsheets
The number of worksheets is 1

>>> print "Worksheet name(s):", book.sheet_names()
Worksheet name(s): [u'mibtel']

>>> sh = book.sheet_by_index(0)
>>> print sh.name, sh.nrows, sh.ncols
mibtel 2385 7

>>> print "Cell D3 is", sh.cell_value(rowx=2, colx=3)
Cell D3 is 13096.00

>>> r.p=[]
>>> r.p
[]
```

```
>>> for rx in range (sh.nrows):
     r.p = r.append(r.p, sh.cell_value(rowx=rx, colx=4))

>>> r.p
['Close',      '13879.00',   '13574.00',   '13338.00',   '13414.00',
'13548.00',   '13539.00',   '12974.00',   '12855.00',   '12420.00',
'13116.00',   '13217.00',   '13068.00',   '12709.00',   '12678.00',
'12113.00',   '11990.00',   '11754.00',   '11558.00',   '11629.00',
'11368.00',   '11414.00',   '11175.00', ...

>>> r.p.remove('Close')
>>> r.assign('p2', r.p)

['13879.00', '13574.00', '13338.00', '13414.00', '13548.00',
'13539.00', '12974.00',
 '12855.00', '12420.00', '13116.00', '13217.00', '13068.00',
'12709.00', '12678.00',
 '12113.00', '11990.00', '11754.00', '11558.00', '11629.00',
'11368.00', '11414.00',
 '11175.00', '11175.00', '10544.00', ...

>>>r('p3=type.convert(p2)')

[13879.0, 13574.0, 13338.0, 13414.0, 13548.0, 13539.0, 12974.0,
12855.0, 12420.0, 13116.0,
 13217.0, 13068.0, 12709.0, 12678.0, 12113.0, 11990.0, 11754.0,
11558.0, 11629.0, 11368.0,
 11414.0, 11175.0, 11175.0, 10544.0, 10740.0, 11172.0, 11808.0,
11530.0, 11816.0, 12526.0,
 12774.0, 12494.0, ...

>>> ris=r.summary(r.p3)
>>> print ris
{'Min.': 10540.0, '1st Qu.': 20460.0, '3rd Qu.': 29450.0,
'Median': 24620.0, 'Max.': 34820.0, 'Mean': 24630.0}

>>> r.plot(r.p3, type = 'l')
```

Bibliografia

A. Meltzer (1995), Journal of Economic Perspectives, "Monetary, credit (and other) transmission processes: a monetarist perspective", 9, 4, p 49-72.

A. Sembenelli, F. Bagliano e L. Benfratello, "Appunti di Econometria" (2003) ed "Econometria II" (2007), Università degli studi di Torino.

A. Fornasini, "Mercati finanziari: scelta e gestione di operazioni speculative", Etaslibri.

Angelo M. Mineo (2003), "Una guida all'utilizzo dell'ambiente statistico R", Università degli studi di Palermo.

Bernhard Pfaff (2009), "VAR Modelling", r-package 'vars', Version 1.4-6

B. Bernanke e M. Gertler. (1995), Journal of Economic Perspectives, "Inside the black box: the credit chanel of monetary policy transmission", 9, 4, p 27-48.

Enrico Baggio (2002/2003), "Modelli GARCH multivariati con correlazione condizionata dinamica".
http://tesi.cab.unipd.it/180/1/Baggio.pdf

Fabio Cesare Bagliano, Giuseppe Marotta (1999) "Economia Monetaria", Il mulino.

Frederic S. Mishkin, Stanley G. Eakins, Giancarlo Forestieri (2007), "Istituzioni e mercati finanziari", Pearson.

Grant V. Farnsworth (2006), "Econometrics in R". http://cran.r-project.org/doc/contrib/Farnsworth-EconometricsInR.pdf

Herald Schimidbauer, Vehbi Sinan Tunalioglu (2004), "An R Package for the estimation of MGARCH-BEKK models". http://www.vsthost.com/vstDocs/mgarchBEKK/docs/mgarchBEKK_manual_v0.05.pdf

J. B. Taylor (1995), Journal of Economic Perspectives, "The monetary transmission mechanism: an empirical framework", 9, 4, p 11-26.

Laura Giarrè, "lezioni di teoria dei sistemi", Università degli studi di palermo. http://www.unipa.it/~giarre/teachindex.html

M. Gentile, N. Linciano, G.Siciliano, "Le scelte di portafoglio delle famiglie italiane e la diffusione del risparmio gestito", n °59-Ottobre 2006, Quaderni di Finanza CONSOB. http://www.consob.it/main/consob/pubblicazioni/quadernifinanza/qdf59.htm

M. Marchesoni, V. Novellini, L. Tramontana, "Analisi Fondamentale", Il Sole 24 ore.

M.Pring, "Analisi Tecnica dei mercati finanziari", Mc Graw-Hill.

Marno Verbeek (2006), "Econometria", Zanichelli.

O. Blanchard (2000), "Macroeconomia", Il Mulino.

P. Terna, R. Boero, M. Morini, M. Sonnessa (2006), "Modelli per la complessità", Il Mulino. http://web.econ.unito.it/terna/

Sergio Salvino Guirreri (2008), "Analisi econometrica delle serie storiche con R". http://cran.r-project.org/doc/contrib/Guirreri-EconometRia.pdf

Simon Benninga (2001), "Modelli Finanziari con Excel", McGraw-Hill.

S. M. Barbosa (2009), "Multivariate AutoRegressive analysis", r-package 'mAr', Version 1.1-1

Stefano Mazzuco (2006), "Esercitazioni con R". http://homes.stat.unipd.it/mazzuco/

Vito M. R. Muggeo, Giancarlo Ferrara (2005), "Il linguaggio R: concetti introduttivi ed esempi", II Edizione. http://cran.r-project.org/doc/contrib/nozioniR.pdf

Vito Ricci (2006), "Principali tecniche di regressione con R". http://cran.r-project.org/doc/contrib/Ricci-regression-it.pdf

Siti di riferimento:

http://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale
http://www.borsaprof.it/
http://it.finance.yahoo.com/
http://cran.r-project.org/
http://rpy.sourceforge.net/
http://www.daimi.au.dk/~besen/TBiB2007/lecture-notes/rpy.html